

## TD 4 : Principe d'Alembert

### Ex 1 : étude de la cabine d'ascenseur

Un homme de 80 kg se tient debout sur une balance dans une cabine d'ascenseur à l'arrêt (Fig.1). Le moteur de l'ascenseur est mis en marche et la tension  $T$  du câble de levage atteint la valeur de 900 daN pendant les trois premières secondes. Si l'accélération est supposée constante, quelle lecture peut-on lire sur la balance? la masse de l'ensemble (cabine + balance) est de 720 kg.

**Hypothèse :** Les frottements sont négligés ainsi que l'action des rails,

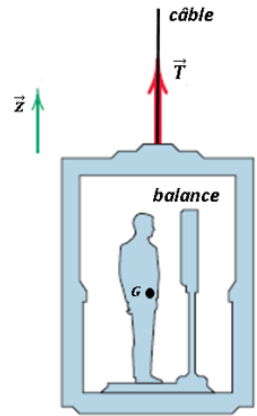


Figure 1

### Solution

#### a) Isolons l'ensemble cabine + homme + balance

Afin de simplifier l'étude, supposons que le centre de gravité  $G$  de l'ensemble est situé sur la verticale commune à  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$ .

Le principe de d'Alembert s'écrit :  $\sum \vec{F}_{Ext} - m\vec{a}_G = \vec{0}$  d'où  $\vec{T} + \vec{P} - m\vec{a}_G = \vec{0}$ .

En projetant sur la verticale  $z$ , on obtient:

$$\begin{aligned} -P + T - m \cdot a_G &= 0 \\ -(720 + 80) \cdot 9.81 + 9\,000 - (720 + 80) a_G &= 0 \\ d'où : a_G &= 1.44 \text{ m.s}^{-2}. \end{aligned}$$

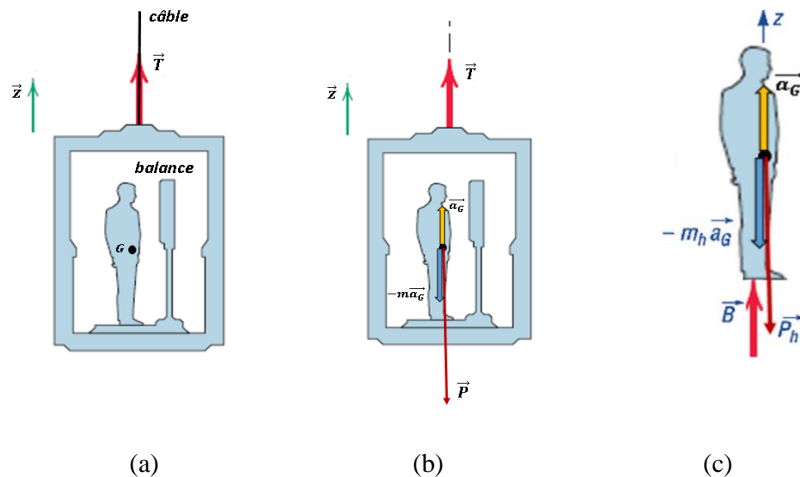


Figure 1: étude de la cabine d'ascenseur

#### b) Isolons l'homme seul

ici, le repère attaché à la cabine n'est pas galiléen. L'homme est soumis à trois actions : son poids  $\vec{P}_h$ ; l'action exercée par la balance  $\vec{B}$  et la force d'inertie  $(-m\vec{a}_G)$ . L'application du principe de D'Alembert nous permet d'écrire :

$$\sum \vec{F}_{Ext} - m\vec{a}_G = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{P}_h + \vec{B} - m\vec{a}_G = \vec{0}$$

en projetant sur l'axe  $z$ , on obtient :

$$\begin{aligned} P_h + B - m_h a_G &= 0 \\ B = m_h g + m_h a &= 80 (9.81 + 1.44) = 900 \text{ N}. \end{aligned}$$

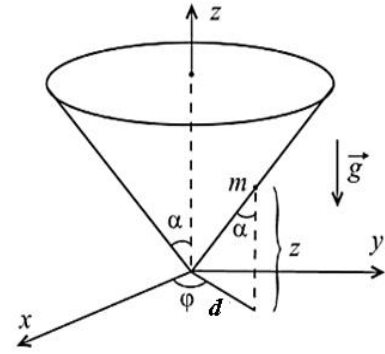
Masse fictive mesurée par la balance :

$$m_h' = 900 / 9.81 = 91.74 \text{ kg}.$$

**Remarque :** pour le mouvement inverse ( $a_G = -1.44 \text{ m.s}^{-2}$ ), avec freinage, la masse fictive de l'individu serait  $80 - 11.74 = 68.26 \text{ kg}$ .

*Ex 2 : Particule sur la surface d'un cône*

On considère une particule de masse  $m$  est contrainte à évoluer sur la surface d'un cône qui se trouve dans un champ de gravitation  $\vec{g}$  (Fig.2). étudier le mouvement de la particule en utilisant le principe de d'Alembert.



**Figure 2.** Particule sur la surface d'un cône

**Solution**

L'équation de la contrainte est :  $\tan \alpha = \frac{d}{z}$ .

La masse est soumise aux efforts d'inertie ainsi qu'à la gravitation. Alors, selon le principe de d'Alembert, on doit avoir :

$$(m\vec{r} - m\vec{g})\delta\vec{r} = 0$$

La position instantanée de la particule est donnée par le vecteur  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Si l'on considère le

déplacement virtuel  $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$ , alors le principe de d'Alembert devient

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y + m(\ddot{z} + g)\delta z = 0.$$

Attention,  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  ne sont pas indépendants car le point n'a que deux degrés de liberté sur la surface. Ceci nous incite à introduire les coordonnées généralisées ( $q_1, q_2$ ) du point matériel, notamment ( $q_1, q_2$ ) = ( $d, \varphi$ ) qui nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} x = d \cos \varphi \\ y = d \sin \varphi \\ z = d \cot \alpha \end{cases}$$

alors, on peut établir facilement que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{d} \cos \varphi - d \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{d} \sin \varphi + d \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = \dot{d} \cot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta x = \delta d \cos \varphi - d \delta \varphi \sin \varphi \\ \delta y = \delta d \sin \varphi + d \delta \varphi \cos \varphi \\ \delta z = \delta d \cot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{d} \cos \varphi - 2\dot{d}\dot{\varphi} \sin \varphi - d\ddot{\varphi} \sin \varphi - d\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{y} = \ddot{d} \sin \varphi + 2\dot{d}\dot{\varphi} \cos \varphi + d\ddot{\varphi} \cos \varphi - d\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ \ddot{z} = \ddot{d} \cot \alpha \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation de d'Alembert :

$$\begin{aligned} & m(\ddot{d} \cos \varphi - 2\dot{d}\dot{\varphi} \sin \varphi - d\ddot{\varphi} \sin \varphi - d\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)(\delta d \cos \varphi - d \delta \varphi \sin \varphi) \\ & + m(\ddot{d} \sin \varphi + 2\dot{d}\dot{\varphi} \cos \varphi + d\ddot{\varphi} \cos \varphi - d\dot{\varphi}^2 \sin \varphi)(\delta d \sin \varphi + d \delta \varphi \cos \varphi) \\ & + m(\ddot{d} \cot \alpha + g)(\delta d \cot \alpha) = 0. \end{aligned}$$

En regroupant les termes en  $\delta d$  et  $\delta \varphi$  et en éliminant la masse  $m$ , on obtient

*Principe de D'Alembert*

$$(2\dot{d}\dot{\phi} + d\ddot{\phi}).d.\delta\phi + [(\tan\alpha + \cot\alpha)\ddot{d} - d\dot{\phi}^2 \tan\alpha + g] \cot\alpha . \delta d = 0$$

Cependant,  $\delta d$  et

$$\begin{aligned} (2\dot{d}\dot{\phi} + d\ddot{\phi}).d &= 0 \\ (\tan\alpha + \cot\alpha)\ddot{d} - d\dot{\phi}^2 \tan\alpha + g &= 0 \end{aligned}$$

Ce sont deux équations différentielles décrivant le mouvement

### Ex 3 : Le Cric

Un cric est un mécanisme articulé destiné à soulever de lourdes charges, représenté sur la figure 3. Il est constitué de deux plateaux rigides (l'un prenant appui sur le sol, l'autre soutenant la charge de poids  $P$ ) articulés à un losange déformable de côté  $l$ , par l'intermédiaire d'une tige filetée de pas  $h$ , (l'entraxe du cric change d'une longueur  $h$  en un tour de manivelle) actionnée par une force  $F$  exercée sur une manivelle de bras  $a$ .

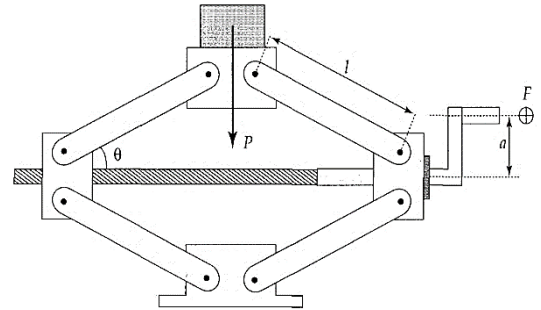


Figure 3. Principe du cric

On suppose aucun frottement sur les parties mécaniques du cric.

- 1) En inspectant les contraintes pour le système, montrer que celui-ci est à un seul degré de liberté. Quelle coordonnée généralisée vous semble la plus pertinente ?
- 2) En utilisant le principe de d'Alembert, donner le lien entre le poids à soulever et la force exercée, en fonction des caractéristiques du cric et de l'angle  $\theta$  que fait un côté du losange avec la tige filetée.

*Application numérique* - Calculer le rapport entre le poids soulevé et la force exercée, pour un cric de bras de manivelle  $a = 20$  cm, de filetage  $h = 2$  mm, au début du levage lorsque  $\theta = 30^\circ$

### Solution

- 1) On nomme ABCD le losange du cric, le sommet A sous le poids, le sommet B à la manivelle et O le centre du losange, au milieu de la tige filetée BD. A priori la configuration du système est donnée par l'angle  $\alpha$  que fait la manivelle avec la verticale, et par la forme du losange, c'est-à-dire les valeurs de DB et AC.

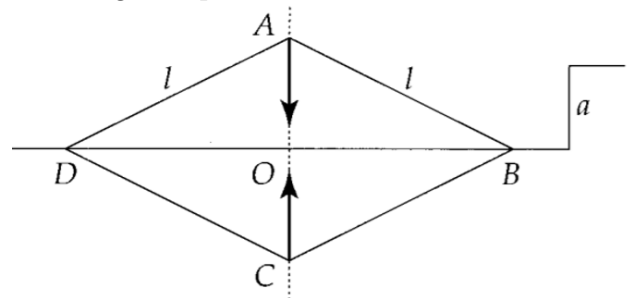


Figure 4. Losange ABCD représentant le cric de façon schématique

En fait, nous avons une première contrainte holonôme due à la distance invariante du côté du losange  $OA^2 + OB^2 = l^2$ . Nous avons une deuxième contrainte holonôme due à la tige filetée qui donne un lien entre  $\alpha$  et DB (lorsque  $\alpha$  varie de  $2\pi$ , DB varie de  $h$ ). Finalement l'angle  $\alpha$  seul permet de décrire la configuration du système ; celui-ci est à un degré de liberté.

- 2) Faisons un déplacement virtuel  $\delta\alpha$  dans le sens direct.

La tige filetée augmente sa longueur DB de  $\delta x = h\delta\alpha/(2\pi)$  et la longueur  $OB=OD$  de  $\delta OB = \delta x/2$ . En conséquence OA diminue, puisque la relation  $OA^2 + OB^2 = l^2$  doit toujours être satisfaite.

Il est facile, dans ces conditions, de voir que  $\delta CA = 2\delta OA = -\frac{\delta x}{\tan\theta}$

On obtient ainsi la variation d'altitude du poids en fonction du déplacement virtuel :

$$\delta z = \delta CA = \frac{-h\delta\alpha}{2\pi \tan\theta}$$

Les forces intervenant sont :

- le poids  $P$  agissant en A qui effectue un travail :  $\delta W_P = -P.\delta z = P.h.\delta\alpha / (2.\pi.\tan\theta)$  ;
- la force du point d'appui dont le point d'application ne bouge pas et qui ne travaille donc pas ;

• la force  $F$  agissant sur la manivelle dont le travail virtuel a pour expression  $\delta W_F = -F.a.\delta\alpha$  (si on veut maintenir l'équilibre, la force doit être opposée au sens de rotation direct considéré ci-dessus).

Le travail virtuel total :  $\delta W = \left( \frac{P h}{2\pi \tan \theta} - F a \right) \delta\alpha = Q_\alpha \delta\alpha$  est la somme de ces deux travaux.

On en déduit la force généralisée :  $Q_\alpha = \frac{P h}{2\pi \tan \theta} - F a$

A l'équilibre, le principe de d'Alembert impose une force généralisée nulle, ce qui conduit à l'expression demandée :

$$\frac{P}{F} = \frac{2\pi . a . \tan \theta}{h}$$

Pour avoir un rapport aussi grand que possible (ce qui est la justification du principe du cric), il faut choisir un grand bras de manivelle et/ou un petit pas de vis.

#### • Application numérique

- Avec  $a = 20$  cm,  $h = 0,2$  cm et  $\tan \theta = 0,577$ , on trouve  $P / F = 363$ , ce qui permet de maintenir soulevée une voiture de 16000 N avec une force de seulement  $F = 11$  N (n'oublions pas que  $P = 16000 / 4$  dans ce cas).

#### Ex 4: Machine d'Atwood simple

On considère le dispositif ci-contre (machine d'Atwood) qui permet l'étude de la chute des corps avec une valeur faible de l'accélération. Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont reliées par un fil inextensible passant sur une poulie de rayon  $R$  d'inertie négligeable.

On néglige la masse du fil, les frottements et la résistance de l'air et on admet que le fil ne glisse pas sur la poulie.

- 1) Calculer l'accélération de ces masses en utilisant le principe de d'Alembert
- 2) Trouver la tension dans la corde

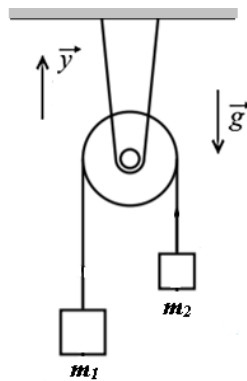


Figure 5. machine d'Atwood

#### Solution

##### 1) Calcul des accélérations

Le mouvement du système est paramétré par les coordonnées physiques  $y_1$  et  $y_2$ .

Les forces qui s'appliquent au système sont, en plus de la tension du câble  $\vec{T}$ , les poids  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$ , les forces d'inertie.

Les vecteurs position des deux masses sont :  $\vec{r}_1 = y_1 \vec{j}$  ;  $\vec{r}_2 = y_2 \vec{j}$

Les deux variables  $y_1$  et  $y_2$  sont dépendantes vu que la longueur de la corde est fixe :  $y_1 + y_2 = cste$ .

Cette contrainte est maintenue grâce à la tension du câble  $\vec{T}$  qui est une force de contrainte. On a une contrainte holonome alors, le système a un seul ddl.

La dérivation de la contrainte nous donne :  $\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0$ ,  $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$ .

Soit :  $\dot{y}_1 = -\dot{y}_2 = \dot{y}$ ,  $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2 = \ddot{y}$

En termes de déplacement virtuel, on aura :  $\delta y_1 = -\delta y_2 = \delta y$

Donnons à la masse  $m_1$  un déplacement virtuel  $\overrightarrow{\delta r_1}$  tel que :  $\overrightarrow{\delta r_1} = \delta y \cdot \vec{j}$ , alors vu la contrainte alors :  $\overrightarrow{\delta r_2} = -\delta y \cdot \vec{j}$ ,

Le travail virtuel de la force d'inertie de la masse  $m_1$  s'écrit :

$$\delta W_{I1} = (-m_1 \ddot{y}_1 \vec{j}) \cdot (\overrightarrow{\delta r_1}) = -m_1 \ddot{y} \delta y$$

Le travail virtuel de la force d'inertie de la masse  $m_2$  s'écrit :

$$\delta W_{I2} = (-m_2 \ddot{y}_2 \vec{j}) \cdot (\overrightarrow{\delta r_2}) = -m_2 \ddot{y} \delta y$$

Le travail virtuel du poids de la masse  $m_1$  :

$$\delta W_{P1} = (-m_1 g \vec{j}) \cdot (\overrightarrow{\delta r_1}) = -m_1 g \delta y$$

Le travail virtuel du poids de la masse  $m_2$  :

$$\delta W_{P2} = (-m_2 g \vec{j}) \cdot (\overrightarrow{\delta r_2}) = +m_2 g \delta y$$

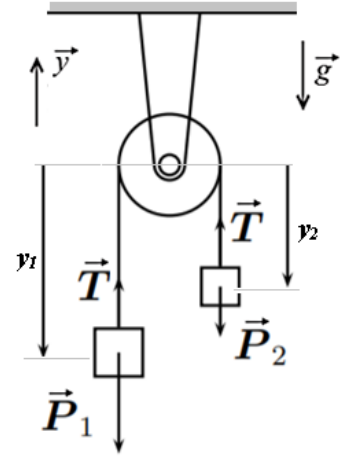


Figure 6.

Selon D'Alembert, Le travail virtuel de la tension de câble  $\vec{T}$  est nul car c'est une force liaison et elle ne travaille pas pour le déplacement virtuel  $\delta y$  compatible avec notre liaison. Aussi le travail des forces de frottement est nul. Le bilan de tous les travaux restant est comme suit :

$$-m_1 \ddot{y} \delta y + m_2 \ddot{y} \delta y - m_1 g \delta y + m_2 g \delta y = 0$$

$$-m_1 \ddot{y} - m_2 \ddot{y} - m_1 g + m_2 g = 0$$

$$-(m_1 + m_2) \ddot{y} + (-m_1 + m_2) g = 0$$

$$\ddot{y} = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}$$

## 2) Calcul de la tension du cable

Pour retrouver l'expression de la tension dans la corde on choisit un déplacement virtuel **non compatible** avec la liaison, notamment :  $\overrightarrow{\delta r_1} = \overrightarrow{\delta r_2} = -\delta z \vec{j}$ , pour lequel la tension va travailler.

Nous avons alors, selon le PTV:

$$(m_1 g - T - m_1 \ddot{r}_1) \delta z + (m_2 g - T + m_2 \ddot{r}_1) \delta z = 0$$

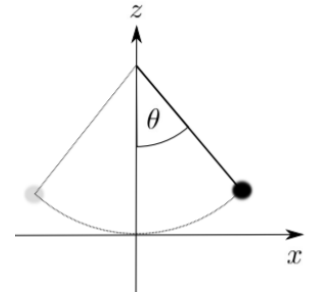
$$(m_1 + m_2)g - 2T + (m_2 - m_1) \ddot{r}_1 = 0$$

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)g + (m_2 - m_1)\ddot{r}_1]$$

**N.B. :** Les mêmes résultats peuvent être obtenus en utilisant les équations de Newton.

**Ex 05** Pendule en coordonnées cartésiennes

En utilisant le principe de D'Alembert, étudier le mouvement du pendule de la figure qui effectue des mouvements dans le plan  $\{x, z\}$  sous l'influence de la force de gravitation  $\vec{F} = -mg\vec{z}$ . La position de la masse est définie par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

**Solution**

Ici on doit imposer deux contraintes,

$$\begin{aligned}\sigma_1(\mathbf{r}) &= x^2 + y^2 + (z - l)^2 - l^2 \equiv 0, \\ \sigma_2(\mathbf{r}) &= y \equiv 0,\end{aligned}$$

qui fixent, respectivement, la distance  $l$  de la masse  $m$  du point de fixation et le plan du mouvement. Ceci laisse donc  $f = 3 - 2 = 1$  degrés de liberté et la force de contrainte a la forme

$$\mathbf{Z} = \lambda_1 \frac{\partial \sigma_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \lambda_2 \frac{\partial \sigma_2(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2(z-l) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les équations du mouvement sont par conséquent

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2\frac{\lambda_1}{m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-l \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de déterminer les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  on différencie les contraintes holonomes deux fois par rapport au temps. La première différenciation donne des contraintes pour les vitesses,

$$\begin{aligned}2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z-l)\dot{z} &= 0, \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}$$

et la deuxième une contrainte pour les accélérations,

$$\begin{aligned}\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}(z-l) + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= 0, \\ \ddot{y} &= 0.\end{aligned}$$

Ici on insère les composantes de la forme générale des accélérations, ce qui donne un système d'équations linéaires pour les paramètres,  $\lambda_j$ , dont la solution est

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{m(g(l-z) + \dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2l^2}, \\ \lambda_2 &= 0.\end{aligned}$$

ou l'on tient compte des contraintes imposées et des contraintes résultantes pour les vitesses. Avec ceci, l'équation du mouvement finale devient

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{x(g(l-z) + \dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{l^2}, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= -g + \frac{(l-z)(g(l-z) + \dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{l^2}.\end{aligned}$$

Afin de respecter les contraintes imposées, ces équations différentielles doivent être résolues avec des conditions initiales qui respectent ces contraintes, y compris leurs dérivées par rapport à  $t$ .