

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM ĐỨC TUẤN

**THUẬT TOÁN NÓN XOAY TÌM CHIẾN LƯỢC HỖN HỢP  
TỐI ƯU TRONG BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG**

**Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG**

**Mã số: 60. 46. 01. 12**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học**

**TS. Nguyễn Anh Tuấn**

**Thái Nguyên - 2015**

## MỤC LỤC

<b>MỞ ĐẦU</b> .....	i
<b>Chương 1. THUẬT TOÁN NÓN XOAY VÀ BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN</b>	
1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính .....	1
1.2. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính, cạnh và phương của nón và Nón – min (nón cực tiểu).....	1
1.2.1. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính.....	1
1.2.2. Khái niệm về cạnh của nón đơn hình.....	2
1.2.3. Khái niệm nón xoay $M(r,s)$ sinh ra từ nón $M$ .....	4
1.2.4. Định nghĩa Nón – min (nón cực tiểu).....	5
1.3. Phương pháp nón xoay tuyến tính.....	7
1.3.1. Thuật toán nón xoay tuyến tính.....	8
1.3.2. Bảng lặp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính và ví dụ minh họa.....	10
1.4. Thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm.....	14
1.4.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm.....	14
1.4.2. Xây dựng nón – min (nón cực tiểu) xuất phát.....	15
1.4.3. Thuật toán nón xoay tuyến tính $LA$ giải bài toán qui hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu có hệ số không âm.....	15
1.4.4. Lựa chọn chỉ số đưa vào cơ sở.....	16
1.5. Cặp bài toán đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.....	18
1.5.1. Cặp bài toán đối ngẫu.....	18
1.5.2 Một số tính chất và định lý đối ngẫu.....	19
1.6. Bài toán trò chơi ma trận.....	20
1.6.1. Khái niệm trò chơi ma trận.....	21
1.6.2 Hàm thu hoạch của $P_I$ .....	22
1.6.3. Điểm yên ngựa và chiến lược tối ưu.....	23

1.7. Đưa trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.....	24
1.7.1 Đưa bài toán trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính.....	24
1.7.2. Ví dụ minh họa[2] .....	26
<b>Chương 2. THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MATRẬN KHI SỐ CHIẾN LƯỢC CỦA MỘT TRONG HAI NGƯỜI CHƠI LÀ HAI</b>	
2.1. Bài toán trò chơi ma trận khi người chơi $P_I$ sử dụng hai chiến lược.....	31
2.2. Phương pháp giải trực tiếp bài toán của người chơi $P_I$ .....	33
2.3. Bảng giải bài toán của người chơi $P_I$ theo phương pháp TT.....	41
2.4. Ví dụ minh họa giải bài toán $P_I$ theo phương pháp TT.....	44
<b>Chương 3. NHẬN XÉT VÀ KẾT LUẬN.....</b>	48
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>	49

## MỞ ĐẦU

*Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính với các biến không âm. Nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính trên thực tế thường bắt đầu ở dạng này, do vậy luận văn này trình bày phương pháp nón xoay giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính. Từ đó ta xây dựng thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm và ứng dụng nó để tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu trong trò chơi ma trận. Luận văn gồm 2 chương:*

*Chương 1, tôi trình bày phương pháp nón xoay và thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán quy hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu có hệ số không âm với cơ sở xuất phát từ gốc tọa độ  $O(0, 0, \dots, 0)$ . Sau đó trình bày bài toán trò chơi ma trận và đưa việc tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu của bài toán trò chơi ma trận về việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.*

*Chương 2, luận văn đã ứng dụng thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm trình bày trong chương 1, ta đi xây dựng một phương pháp cụ thể giải trực tiếp bài toán tìm chiến lược tối ưu trong trường hợp đặc biệt với số chiến lược của người chơi thứ nhất là 2 (người chơi thứ hai có số chiến lược chơi là  $n$  bất kỳ) mà chúng ta vẫn thường giải nó bằng phương pháp đồ thị.*

*Các thuật toán trình bày trong luận văn này được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các ngôn ngữ như Pascal, C, Java, ...*

*Luận văn này hoàn thành dựa trên các tài liệu [2], [4], [5], [6] và các tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.*

**Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015**

Tác giả

**Phạm Đức Tuấn**

## Chương 1

### THUẬT TOÁN NÓN XOAY VÀ BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN

Trong chương này, tôi trình bày một phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính thuộc lược đồ xấp xỉ ngoài (vì nó xuất phát giải từ đỉnh của một nón đơn hình tuyến tính ngoài miền chấp nhận được) gọi là thuật toán nón xoay tuyến tính [4]. Từ đó trình bày một trường hợp riêng biến thể của nó giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi hàm mục tiêu có các hệ số không âm, đây là lớp bài toán thường hay gặp trong thực tế. Bài toán trò chơi ma trận trong trường hợp cần tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu cũng đã dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn, vì vậy trong chương này cũng sẽ trình bày khái niệm cơ bản về bài toán trò chơi ma trận và đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

#### 1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính sau:

$$(L) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min \\ x \in P_L := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A^i$  là véc tơ dòng và  $A^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq n$ ,  $A^i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \neq O(0, \dots, 0)$ ,  $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Hạng của hệ  $A^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) bằng  $n$ , giả thiết này rất bình thường bởi miền ràng buộc  $P_L$  của bài toán quy hoạch tuyến tính nói chung bao giờ cũng có ràng buộc về dấu của biến  $x$ .

#### 1.2. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính, cạnh và phương của nón và Nón – min (nón cực tiểu)

##### 1.2.1. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính

Xét tập  $M$  được xác định từ  $n$  ràng buộc tuyến tính nào đó của  $P_L$ , cụ thể là:

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i \in I\} \quad (1.1)$$

trong đó  $I := i_1, i_2, \dots, i_n \subset 1, 2, \dots, m$ ,  $|I| = n$  (ở đây  $|I|$  là số đo hay là số phần tử của tập  $I$ ) và  $A^i$  với  $i \in I$  là một hệ độc lập tuyến tính. Tập  $M$  gọi là nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc  $P_L$  với đỉnh  $x^M$  là nghiệm (được xác định) thỏa mãn hệ sau:

$$\langle A^i, x \rangle + b_i = 0, \forall i \in I \quad (1.2)$$

Hệ véc tơ  $A^i$  với  $i \in I$  được gọi là cơ sở của nón  $M$ , hay cũng gọi là cơ sở của đỉnh  $x^M$ . Tập  $I$  gọi là tập chỉ số của cơ sở của nón  $M$ .

### 1.2.2. Khái niệm về cạnh của nón đơn hình

Với mỗi  $i \in I$ , tập hợp các điểm  $x \in \square^n$  thỏa mãn hệ:

$$\langle A^r, x \rangle + b_r = 0, \forall r \in I \setminus \{i\} \quad (1.3)$$

gọi là đường thẳng  $i$  của nón  $M$ .

Tập các điểm  $x$  thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \langle A^r, x \rangle + b_r = 0, \forall r \in I \setminus i \\ \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0 \end{cases}$$

gọi là cạnh  $i$  của nón  $M$ .

Với mỗi  $i (i \in I)$ , Véc tơ  $z_M^i (i \in I)$ , xác định bởi hệ:

$$\begin{cases} \langle A^r, z_M^i \rangle = 0, \forall r \in I, r \neq i \\ \langle A^i, z_M^i \rangle = -1 \end{cases} \quad (1.4)$$

gọi là véc tơ chỉ phương của cạnh  $i$  của nón  $M$ .

Đỉnh  $x^M$  của nón  $M$  có thể xác định từ (1.2), trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương  $z_M^i (i \in I)$  thì chúng ta có thể sử dụng công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i \quad (1.5)$$

### Định lý 1.1 [4]

Nếu  $x^M$  là đỉnh của nón đơn hình  $M$  được xác định từ (1.2), và hệ véc tơ chỉ phương  $z_M^i (i \in I)$  của cạnh  $i$  của nón  $M$  xác định từ (1.4) thì chúng ta có thể xác định đỉnh  $x^M$  từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i$$

Từ định lý 1.1 ta suy ra trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương  $z_M^i$  ( $i \in I$ ) thì chúng ta có thể xác định đỉnh  $x^M$  từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i$$

Ta ký hiệu:

$$J^+ x^M := j \in 1, 2, \dots, m : \langle A^j, x^M \rangle + b_j > 0 \quad (1.6)$$

Rõ ràng khi  $J^+(x^M) = \emptyset$  thì  $x^M$  chính là một điểm chấp nhận của bài toán (L). Chúng ta giả sử  $J^+(x^M) \neq \emptyset$ . Với mỗi  $s \in J^+(x^M)$ , chúng ta ký hiệu như sau:

$$I^s := i \in I : \langle A^s, z_M^i \rangle \neq 0 \subset I := i_1, i_2, \dots, i_n \quad (1.7)$$

$$I^0 := i \in I : \langle A^s, z_M^i \rangle = 0 \subset I := i_1, i_2, \dots, i_n \quad (1.8)$$

Ta thấy:  $I = I^0 \cup I^s$ .

Với mỗi  $i \in I^s$  thì đường thẳng  $x = x^M + \alpha \cdot z_M^i$  sẽ giao với siêu phẳng

$$\langle A^s, x \rangle + b_s = 0 \text{ tại điểm } x^i = x^M + \alpha_i \cdot z_M^i. \quad (1.9)$$

$$\text{trong đó } \alpha_i = -\frac{\langle A^s, x^M \rangle + b_s}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \quad (1.10)$$

Ta gọi

$$I_+^s := i \in I^s : \alpha_i > 0 = i \in I^s : \langle A^s, z_M^i \rangle < 0 = i_{s1}, i_{s2}, \dots, i_{sq} \quad (1.11)$$

và  $I_-^s := i \in I^s : \alpha_i < 0$ .

Rõ ràng  $I_+^s \subset I^s \subset I$ .

**Định lý 1.2**  $\forall s \in J^+(x^M)$  thì  $I^s \neq \emptyset$

*Chứng minh* (xem [4])

**Định lý 1.3 [4]**

$I_+^s = \emptyset$  thì tập phương án của bài toán (L) là rỗng.

Định lý này cho ta kết luận rằng, nếu bài toán  $(L)$  có ít nhất một điểm chấp nhận được thì  $I_+^s$  là một tập khác rỗng.

### 1.2.3. Khái niệm nón xoay $M(r,s)$ sinh ra từ nón $M$

Giả sử  $M$  là một nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc  $P_L$  xác định bởi (1.1) và  $J^+(x^M) \neq \emptyset$ , khi đó với mỗi  $S \in J^+(x^M)$  và  $r \in I^s$ , tập hợp các điểm  $x$  thỏa mãn hệ bất đẳng thức:

$$\begin{cases} \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, \forall i \in I, i \neq r \\ \langle A^s, x \rangle + b_s \leq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

xác định một nón đơn hình tuyến tính gọi là nón xoay  $M(r,s)$ , định là:

$$x^{M(r,s)} = x^r = x^M + \alpha_r z_M^r \quad (1.13)$$

trong đó  $\alpha_r$  xác định từ (1.10).

Đỉnh  $x^r$  thỏa mãn:

$$\langle A^i, x^r \rangle + b_i = 0, \forall i \in I \quad r, s = I \cup s \setminus r.$$

Tập chỉ số cơ sở mới  $I(r,s)$  nhận được từ tập chỉ số cơ sở cũ  $I$  bằng cách loại chỉ số  $r$  ra khỏi tập cơ sở cũ, đưa chỉ số  $s$  vào thay. Ta nói nón xoay  $M(r,s)$  sinh ra từ nón  $M$ .

### Bổ đề 1.1

Hệ  $A^i$  với  $i \in I \setminus r, s$  là một hệ độc lập tuyến tính.

*Chứng minh*

Thật vậy, nếu ngược lại hệ  $A^i$  với  $i \in I(r,s)$  là phụ thuộc tuyến tính thì dễ dàng suy ra tồn tại biểu diễn:

$$A^s = \sum_{i \in I \setminus r} \beta_i A^i \Rightarrow \langle A^s, z_M^r \rangle = \langle \sum_{i \in I \setminus r} \beta_i A^i, z_M^r \rangle = \sum_{i \in I \setminus r} \beta_i \langle A^i, z_M^r \rangle = 0$$

Điều này mâu thuẫn với  $\langle A^s, z_M^r \rangle \neq 0$  (vì  $r \in I^s$ ).

Bổ đề này cho ta thấy nón xoay  $M(r,s)$  vẫn là một nón đơn hình.

Các véc tơ chỉ phương  $z_{M(r,s)}^i$ ,  $i \in I \setminus r, s$  của nón xoay mới  $M(r,s)$  được xác định từ (1.4) với tập chỉ số cơ sở mới  $I(r,s)$ , hoặc xác định từ một trong các công thức đơn giản



dưới đây theo các  $x^i, x^r, z_M^i, z_M^r$  (xác định từ (1.4), (1.9), (1.10)) với  $i, r$  thuộc  $I$  là tập chỉ số của cơ sở cũ:

$$z_{M(r,s)}^i = \begin{cases} z_M^i & \text{khi } i \in I^0 \\ z_M^i - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} z_M^r & \text{khi } i \in I^s, i \neq r \\ -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \cdot z_M^r & \text{khi } i = s \end{cases} \quad (1.14)$$

Hay

$$z_{M(r,s)}^i = \begin{cases} z_M^i & \text{khi } i \in I^0 \\ z_M^i - \frac{\langle A^s, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^r \rangle} z_M^r & \text{khi } i \in I^s, i \neq r \\ -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \cdot z_M^r & \text{khi } i = s \end{cases} \quad (1.15)$$

Các công thức này gọi là các công thức đổi cơ sở, bổ đề dưới đây chứng minh các công thức trên.

### Bổ đề 1.2 [4]

Giả sử  $M$  là nón xác định bởi  $M := \{x \in \square^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, \forall i \in I\}$  với các véc tơ chỉ phương  $z_M^i$  của các cạnh xác định theo (1.4), các giao điểm  $x^i$  xác định theo (1.9), (1.10). Khi đó nón xoay  $M(r,s)$  có đỉnh là  $x^{M(r,s)} = x^r$  xác định từ (1.12) với cơ sở tương ứng là  $I_{r,s} = I \cup \{s\} \setminus \{r\}$  và các véc tơ chỉ phương của các cạnh tương ứng là  $z_{M(r,s)}^i$  được xác định bởi (1.15).

#### 1.2.4. Định nghĩa Nón cực tiểu (Nón – min)

Nón đơn hình tuyến tính  $M$  với đỉnh là  $x^M$  được gọi là nón cực tiểu (nón – min) của hàm  $f(x) = \langle C, x \rangle$  của bài toán  $(L)$  nếu  $f(x^M) \leq f(x), \forall x \in M$ .

Ta nói  $M$  là một nón - min của bài toán  $(L)$  khi  $M$  là một nón – min của hàm mục tiêu  $f$  của bài toán  $(L)$ .

Giả sử  $M$  là một nón đơn hình xác định từ hệ (1.1) đỉnh là  $x^M$ , với véc tơ chỉ phương của cạnh  $i$  là  $z_M^i$  ( $i \in I$ ), xác định bởi (1.4), ta có định lý sau.

#### Định lý 1.4

Nếu  $f(x^M) \leq f(x^M + z_M^i)$  thì  $M$  là một nón - min của hàm  $f$ .

*Chứng minh* (xem [4])

#### Hệ quả 1.1

$M$  là một nón - min của hàm  $f(x) = \langle C, x \rangle$  khi và chỉ khi:

$$\langle C, z_M^i \rangle \geq 0, \forall i \in I.$$

Giả sử  $M$  là một nón - min của hàm mục tiêu  $f(x) = \langle C, x \rangle$  của bài toán (L).

Gọi

$$V^s := \{v \in I_+^s : f(x^v) = \min_{i \in I_+^s} \{f(x^i)\}\} \quad (1.16)$$

$$\text{Vậy } V^s := \{v \in I_+^s : f(x^v) = \min_{i \in I_+^s} \langle C, x^i \rangle\}$$

Thay  $x^v$  và  $x^i$  xác định từ công thức (1.9) vào trên ta có:

$$\begin{aligned} V^s &:= \{v \in I_+^s : \langle C, x^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \langle C, x^i \rangle\} \\ &= \{v \in I_+^s : \langle C, x^M + \alpha_v \cdot z_M^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{\langle C, x^M + \alpha_i \cdot z_M^i \rangle\}\} \\ &= \{v \in I_+^s : \alpha_v \cdot \langle C, z_M^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{\alpha_i \cdot \langle C, z_M^i \rangle\}\} \\ &= \left\{ v \in I_+^s : -(\langle A^s, x^M \rangle + b_s) \cdot \frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -(\langle A^s, x^M \rangle + b_s) \cdot \frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\} \\ &= \left\{ v \in I_+^s : -\frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -\frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\} \\ \text{Vậy: } V^s &:= \left\{ v \in I_+^s : -\frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -\frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\} \quad (1.17) \end{aligned}$$

#### Định lý 1.5

Với mọi  $r \in V^s$  xác định từ (1.17), nếu  $M$  là một nón cực tiểu của hàm mục tiêu của bài toán  $(L)$  thì nón  $M(r,s)$  xác định từ (1.12) cũng là một nón cực tiểu của hàm mục tiêu bài toán  $(L)$

*Chứng minh* (xem [2])

Đỉnh  $x^{M(r,s)}$  của nón xoay  $M(r,s)$  còn có thể xác định công thức sau đây khi biết các véc tơ chỉ phương các cạnh của nón xoay  $M(r,s)$ :

$$x^{M(r,s)} = \sum_{i \in I(r,s)} b_i \cdot z_{M(r,s)}^i \quad (1.18)$$

Phần dưới đây chúng ta sẽ xây dựng thuật toán nón xoay giải bài toán  $(L)$  dựa vào cơ sở lý thuyết trình bày ở các phần trên và định lý 1.5.

### 1.3. Phương pháp nón xoay tuyến tính

Phương pháp nón cực tiểu trình bày dưới đây sẽ cho chúng ta một thuật toán giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với cơ sở xuất phát từ đỉnh một nón cực tiểu của hàm mục tiêu gọi là phương pháp nón xoay tuyến tính.

Việc biết một nón cực tiểu của bài toán nói chung không khó khăn gì. Chẳng hạn trong trường hợp miền ràng buộc  $P_L$  của bài toán  $(L)$  là đa diện, ta có thể dễ dàng chỉ ra được một chóp đơn hình với  $n+1$  đỉnh đã biết chứa  $P_L$ , đỉnh nào của chóp đơn hình này có giá trị của hàm mục tiêu nhỏ nhất tại đó so với các giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh còn lại của chóp thì nón chứa chóp đơn hình tương ứng với đỉnh này chính là một nón-min của bài toán  $(L)$ .

Xét bài toán  $(L)$  trong trường hợp biết một nón – min của bài toán  $(L)$ .

Ý tưởng của thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán  $(L)$  như sau:

Xuất phát từ một nón-min  $M$  ban đầu của hàm mục tiêu bài toán, chúng ta kiểm tra xem đỉnh của nó có thuộc miền chấp nhận của bài toán không (tức là đỉnh này có thỏa mãn tất cả các ràng buộc không) nếu đỉnh này thuộc miền chấp nhận thì nó là một lời giải của bài toán  $(L)$ . Ngược lại ta xây dựng nón xoay mới  $M(r,s)$  (vẫn là nón-min) từ nón cũ  $M$  của bài toán  $(L)$  và lặp lại quá trình kiểm tra nón xoay mới này tương tự như đối với nón  $M$ , quá trình này được thực hiện cho đến khi đỉnh của nón xoay mới  $M(r,s)$  thuộc

miền chấp nhận của bài toán (L) (khi miền ràng buộc của bài toán (L) có phương án) hoặc sẽ phát hiện ra miền ràng buộc của bài toán (L) là rỗng.

### 1.3.1. Thuật toán nón xoay tuyến tính

**Bước chuẩn bị (bước 0).** Giả sử ta đã biết  $M_0$  là nón - min của bài toán (L) với tập chỉ số cơ sở là  $I_0 = i_1^0, i_2^0, \dots, i_n^0$ ,  $x^0 = x^{M_0}$  là đỉnh của  $M_0$  và các véc tơ chỉ phương của các cạnh  $i$  của nón  $M_0$  là  $z_0^i = z_{M_0}^i$  ( $i \in I_0$ ).

**Bước  $k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).** Giả sử  $M_k$  là nón - min của bài toán (L) (đã được xây dựng), với tập chỉ số cơ sở, đỉnh và các véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón  $M_k$  tương ứng là  $I_k := i_1^k, i_2^k, \dots, i_n^k$ ;  $x^k = x^{M_k}$  và  $z_k^i = z_{M_k}^i$ .

Xác định tập  $J^+(x^k)$  theo (1.6):  $J^+(x^k) := j \in 1, 2, \dots, m : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0$

1. Nếu  $J^+(x^k) = \emptyset$  thì dừng lại.  $x^k$  chính là một lời giải của bài toán (L),
2. Nếu  $J^+(x^k) \neq \emptyset$ , ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở theo một trong hai cách sau:

Ta chọn  $s_k$  là một chỉ số tùy ý thuộc  $J^+(x^k)$

hoặc ta chọn  $s_k = \min j : i \in J^+ x^k$  (gọi là qui tắc chọn *min*) (1.19)

hoặc  $s_k = \max j : i \in J^+ x^k$  (gọi là qui tắc chọn *max*)

và xác định:  $I^{s_k} := i \in I_k : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle \neq 0$ ; (1.20)

$$I_+^{s_k} := i \in I^{s_k} : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle < 0 = i_{s_k 1}^k, i_{s_k 2}^k, \dots, i_{s_k q_k}^k, \quad (1.21)$$

2.1. Nếu  $I_+^{s_k} = \emptyset$  thì dừng lại, suy ra bài toán (L) không có phương án.

2.2. Nếu  $I_+^{s_k} \neq \emptyset$ :

$$\text{Gọi } V^{s_k} := \left\{ v \in I_+^{s_k} : -\frac{\langle C, z_k^v \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^v \rangle} = \min_{i \in I_+^{s_k}} \left\{ -\frac{\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle} \right\} \right\} \quad (1.22)$$

và chọn chỉ số đưa ra khỏi cơ sở theo một trong hai cách sau:

Ta chọn  $r_k$  là chỉ số tùy ý thuộc  $V^{s_k}$  hoặc ta chọn

$$r_k = \min v : v \in V^{s_k} \quad \text{hoặc} \quad r_k = \max v : v \in V^{s_k} \quad (1.23)$$

(cách chọn chỉ số này gọi là qui tắc chọn *min* (hoặc là qui tắc chọn *max*)).

Và ta xây dựng nón xoay  $M_{k+1} = M_k(r_k, s_k)$  sinh ra từ nón-min  $M_k$  (xem mục 1.2.3), tập chỉ số cơ sở là  $I_{k+1} = I_k \setminus r_k, s_k = I_k \cup s_k \setminus r_k$ ; và các véc tơ chỉ phương  $z_{k+1}^i$  (sử dụng (1.15)):

$$z_{k+1}^i = \begin{cases} z_k^i & \text{khi } i \in I_k^0 \\ (z_k^i - \frac{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k}) & \text{khi } i \in I_k^{s_k}, i \neq r_k \\ -\frac{1}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} & \text{khi } i = s_k \end{cases} \quad (1.23')$$

Từ (1.5) và (1.13):

$$x^{k+1} = x^{M_k(r_k, s_k)} = x_k^{r_k} = x^k + \alpha_{r_k}^k \cdot z_k^{r_k} = x^k - \frac{\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} = \sum_{i \in I_{k+1}} b_i \cdot z_{k+1}^i \quad (1.24)$$

Quay trở lại bước  $k$  với  $k \leftarrow k+1$

**Một số chú ý:**

1) Từ định lý 1.5 ta dễ dàng có bổ đề 1.3 dưới đây và do đó dễ thấy nón xoay  $M_{k+1}$  được xây dựng (trong thuật toán) sinh ra từ nón-min  $M_k$  vẫn là một nón - min của bài toán (L).

2) Sự lựa chọn chỉ số đưa vào  $s_k = \min j: j \in J^+ \ x^k$  và chỉ số đưa ra  $r_k = \min v: v \in V_k^s$  sẽ làm cho thuật toán đề nghị trên kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp (không xảy ra xoay vòng). Điều này được chứng minh bởi định lý 1.6 dưới đây.

3) Công thức (1.23') gọi là công thức xoay cơ sở và phân tử  $\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle$  được gọi là phân tử xoay, nó là trung tâm để đổi các véc tơ chỉ phương  $z_k^i$  của hệ cơ sở cũ sang hệ cơ sở mới  $z_{k+1}^i$  theo công thức xoay (1.23').

4) Để cho gọn chúng ta đặt  $\langle A^i, x^k \rangle + b_i = A^i(x^k), i = 1, 2, \dots, m$

Dựa trên định lý 1.5, chúng ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau

**Bổ đề 1.3**

Tại mỗi bước lặp  $k$ , khi giải bài toán  $(L)$  theo thuật toán nón xoay tuyến tính với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở và đưa ra khỏi cơ sở là (1.19), (1.20) và (1.21) thì nón xoay  $M_{k+1}$  được xây dựng trong thuật toán vẫn là một nón – min của hàm mục tiêu và ta có  $f(x^k) \leq f(x^{k+1}), \forall k = 1, 2, \dots$

Sự lựa chọn  $s_k = \min_{j: j \in J^+} x^k$  và  $r_k s_k = \min_{v: v \in V_k^s}$ ,

(hoặc  $s_k = \max_{j: j \in J^+} x^k$  và  $r_k s_k = \max_{v: v \in V_k^s}$  sẽ làm cho thuật toán đề nghị trên kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp (không xảy ra xoay vòng). Điều này được chứng minh bởi định lý sau.

### Định lý 1.6

Giải bài toán  $(L)$  theo thuật toán nón xoay với chỉ số chọn đưa vào cơ sở là  $s_k = \min_{j: j \in J^+} x^k$  ( hoặc  $s_k = \max_{j: j \in J^+} x^k$  ) và chỉ số chọn đưa ra khỏi cơ sở tương ứng là  $r_k s_k = \min_{v: v \in V_k^s}$  ( hoặc tương ứng  $r_k s_k = \max_{v: v \in V_k^s}$  ) sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp và cho ta lời giải của bài toán  $(L)$ , hoặc phát hiện ra miền ràng buộc  $P_L$  của bài toán  $(L)$  là rỗng.

Chứng minh định lý này có thể tìm thấy trong [4]

Năm 1977 RG. Bland đã đề xuất qui tắc tránh xoay vòng tương tự như trên cho việc giải bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

### 1.3.2. Bảng lặp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính và ví dụ minh họa

Để dễ tính toán, trong mỗi bước lặp  $k$  ta thiết lập bảng dưới đây gọi là bảng nón xoay thu gọn giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón – min của hàm mục tiêu của bài toán.

**Bảng lặp nón xoay thu gọn:** Bảng A

Chỉ số cơ sở	$b_j$	$c_1 \quad c_2 \dots c_j \dots c_n$	$\langle A^i, x^0 \rangle + b_i$	$\langle A^i, x^k \rangle + b_i$ $k=1, 2, \dots$
1	$b_1$	$a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$	$\langle A^1, x^0 \rangle + b_1$	$\langle A^1, x^k \rangle + b_1$
2	$b_2$	$a_{21} \quad a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n}$	$\langle A^2, x^0 \rangle + b_2$	$\langle A^2, x^k \rangle + b_2$
...	...	...	...	...
$(s_k)$	$b_{s_k}$	$a_{s_k 1} \quad a_{s_k 2} \dots a_{s_k j} \dots a_{s_k n}$	$(\langle A^{s_0}, x^0 \rangle + b_{s_0})$	$(\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k})$
...	...	...	...	...
$m$	$b_m$	$a_{m1} \quad a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn}$	$\langle A^m, x^0 \rangle + b_m$	$\langle A^m, x^k \rangle + b_m$
$i_1^k$	$b_{i_1^k}$	$z_{k1}^{i_1^k} \quad z_{k2}^{i_1^k} \dots z_{kj}^{i_1^k} \dots z_{kn}^{i_1^k}$	$\langle A^{s_k}, z_{i_1^k}^{i_1^k} \rangle$	$-\frac{\langle C, z_{i_1^k}^{i_1^k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_{i_1^k}^{i_1^k} \rangle}$
$i_2^k$	$b_{i_2^k}$	$z_{k1}^{i_2^k} \quad z_{k2}^{i_2^k} \dots z_{kj}^{i_2^k} \dots z_{kn}^{i_2^k}$	$\langle A^{s_k}, z_{i_2^k}^{i_2^k} \rangle$	$-\frac{\langle C, z_{i_2^k}^{i_2^k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_{i_2^k}^{i_2^k} \rangle}$
...	...	...	...	...
$(r_k = i_{s_k p_k}^k)$	$b_{r_k}$	$z_{k1}^{r_k} \quad z_{k2}^{r_k} \dots z_{kj}^{r_k} \dots z_{kn}^{r_k}$	$[\langle A^{s_k}, z_{r_k}^{r_k} \rangle]$	$(-\frac{\langle C, z_{r_k}^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_{r_k}^{r_k} \rangle})$
...	...	...	...	...
$i_n^k$	$b_{i_n^k}$	$z_{k1}^{i_n^k} \quad z_{k2}^{i_n^k} \dots z_{kj}^{i_n^k} \dots z_{kn}^{i_n^k}$	$\langle A^{s_k}, z_{i_n^k}^{i_n^k} \rangle$	$-\frac{\langle C, z_{i_n^k}^{i_n^k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_{i_n^k}^{i_n^k} \rangle}$
Bước $k=0, 1, 2, \dots$	$x^k$	$x_1^k \quad x_2^k \dots x_j^k \dots x_n^k$		

**Bảng lặp nón xoay thu gọn A** gồm 2 phần (xem bảng A): Các số liệu ban đầu được đưa vào bảng và các số liệu cần tính toán theo các công thức trong thuật toán nón xoay được xây dựng thứ tự theo các bước từ trên xuống dưới và từ trái sang phải như sau:

Bước  $k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ):

**Phần thứ nhất của bảng là khai báo số liệu của bước chuẩn bị:**

Đưa vào các số liệu ban đầu của bài toán nằm trong các cột bao gồm có cột chỉ số cơ sở  $1, 2, \dots, m$ , cột số liệu các giá trị  $b_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), dòng đầu tiên trên cùng của phần này là các hệ số của hàm mục tiêu, và ma trận hệ số các ràng buộc  $A$  cụ thể là:

- + Dòng đầu tiên của bảng là dòng các tọa độ  $c_j$  của véc tơ  $C$  của hàm mục tiêu.
- + Cột đầu tiên thứ nhất là cột chỉ số của các véc tơ dòng  $A^i$  của ma trận ràng buộc  $A$  của bài toán ( $L$ ) từ 1 đến  $m$ .
- + Cột thứ hai là cột các giá trị  $b_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) của véc tơ cột  $B$  của ma trận ràng buộc.
- + Tiếp theo bên phải cột thứ hai là bảng của ma trận hệ số gồm các giá trị của ràng buộc  $A: a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ )

**Phần thứ hai của bảng liên với phần thứ nhất là số liệu tính toán các giá trị của hệ véc tơ chỉ phương  $z_k^i$  ( $\forall i \in I_k$ ) và các tọa độ của đỉnh  $x^k$ :**

Tại bước  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) bảng gồm các cột và ma trận của giá trị các véc tơ chỉ phương  $z_k^i$  ( $\forall i \in I_k$ ) cụ thể như sau:

- + Cột thứ nhất là cột chỉ số cơ sở  $i \in I_k$
  - + Cột thứ hai là cột giá trị  $b_i$  với  $i \in I_k$
  - + Tiếp theo bên phải cột thứ hai là bảng ma trận các véc tơ chỉ phương  $z_k^i$  ( $\forall i \in I_k$ ).
- Dòng cuối cùng là các giá trị tọa độ của  $x^k$  là đỉnh của nón-min  $M_k$  đã biết ở bước  $k$ .

Đến đây ta có bảng nón xoay tại bước  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) đã xây dựng xong.

Bây giờ ta chuyển sang kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu và xây dựng bảng nón xoay mới ở bước tiếp theo  $k+1$  nếu  $x^k$  chưa phải là phương án tối ưu.

Từ dòng cuối cùng của phần thứ hai của bảng là dòng các tọa độ của  $x^k$ , chúng ta đi tính các giá trị  $\langle A^i, x^k \rangle + b_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m$ ) và xây dựng tiếp các cột chứa các giá trị này ở bên phải ma trận ràng buộc  $A$  trong phần thứ nhất của bảng.



Từ cột chứa giá trị  $\langle A^i, x^k \rangle + b_i (i=0,1,2,\dots,m)$  đã biết này ở bước lặp  $k$  (vị trí bên phải ma trận ràng buộc  $A$ ). Theo thuật toán nón xoay ta xác định được tập  $J^+(x^k)$  có hai khả năng:

+ Nếu  $J^+(x^k) = \emptyset$  thì dừng và  $x^k$  là một lời giải của bài (L)

+ Nếu  $J^+(x^k) \neq \emptyset$  thì theo thuật toán nón xoay ta chọn được chỉ số đưa vào cơ sở  $s_k$  và chúng ta tiến hành tính toán các cột sau:

Bên phải bảng  $z_k^i, \forall i \in I_k$  ở phần thứ hai của bảng ta xây dựng cột chứa giá trị  $\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle, \forall i \in I_k$

Từ cột giá trị này ta xác định được tập  $I_+^{s_k}$  và theo thuật toán ta có hai khả năng:

+ Nếu  $I_+^{s_k} = \emptyset$  thì dừng và kết luận bài toán (L) không có phương án.

+ Nếu  $I_+^{s_k} \neq \emptyset$  thì từ thuật toán nón xoay chúng ta phải xây dựng cột tính giá trị  $\frac{-\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}, \forall i \in I_+^{s_k}$ . Từ đây theo (1.21) và (1.22) của thuật toán nón xoay tuyến tính ta chọn được chỉ số đưa ra cơ sở là  $r_k$ .

Đến đây các thông tin để xây dựng bảng lặp ở bước  $k+1$  từ bảng lặp ở bước  $k$  đã đầy đủ, chúng ta xây dựng bảng lặp ở bước  $k+1$  phía dưới bảng lặp ở bước  $k$  như sau:

+ Cột đầu tiên của bảng lặp ở bước  $k+1$  là cột chỉ số cơ sở  $I_{k+1} = (I_k \cup s_k) \setminus r_k$  được xây dựng bằng cách chuyển cột chỉ số cơ sở của bảng ở bước lặp  $k$  xuống và chỉ cần thay chỉ số  $r_k$  bằng chỉ số  $s_k$  ở bảng mới là được.

+ Cột tiếp theo là cột chứa các giá trị  $b_i$  với  $i \in I_{k+1}$  (bên phải cột chỉ số cơ sở  $I_{k+1}$ ) được xây dựng bằng cách chuyển cột chứa các giá trị  $b_i$  với  $i \in I_k$  của bảng ở bước lặp thứ  $k$  xuống và thay giá trị  $b_{r_k}$  bằng giá trị  $b_{s_k}$  ở bảng mới (bước  $k+1$ ).

+ Tiếp theo bên phải cột  $b_i (i \in I_{k+1})$  là bảng ma trận các véc tơ chỉ phương  $z_{k+1}^i, \forall i \in I_{k+1}$  của nón-min  $M_{k+1}$  được tính từ các véc tơ chỉ phương  $z_k^i$  của nón – min  $M_k$  ở bảng lặp bước  $k$  theo công thức xoay (1.23).

Sau đó ta tính toán đến dòng cuối cùng tiếp theo của bảng này là dòng các tọa độ của đỉnh nón – min  $M_{k+1}$  là  $x^{k+1} = \sum_{i \in I_{k+1}} b_i \cdot z_{k+1}^i$  (theo công thức (1.24))

Đến đây bảng nón xoay mới ở bước lặp  $k+1$  đã được xây dựng xong.

Quá trình lặp này sẽ kết thúc sau hữu hạn bước bởi định lý 1.6.

**Một số phần tử trung tâm cần chú ý khi xây dựng bảng nón xoay thu gọn là:**

+ Giá trị  $\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) dương nằm trong cột chứa các giá trị  $\langle A^i, x^k \rangle + b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) được ở trong dấu móc tròn ( $\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}$ ) tương ứng với dòng  $s_k$  (được chọn đưa vào cơ sở ở bước lặp  $k$ ) theo mục  $b_1$ ) hay  $b_2$ ) trong thuật toán nón xoay tuyến tính.

+ Giá trị  $\frac{-\langle C, z_k^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle}$  nằm trong cột chứa các giá trị  $\frac{-\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}, \forall i \in I_+$  được ở trong dấu móc tròn ( $\frac{-\langle C, z_k^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle}$ ) tương ứng với dòng  $r_k$  (được chọn đưa ra cơ sở ở bước lặp  $k$ ) theo tiêu chuẩn (1.21) và (1.22) của thuật toán nón xoay tuyến tính.

+ Phần tử xoay  $\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle$  thuộc cột chứa các giá trị  $\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle, \forall i \in I_k$  được nằm trong dấu móc vuông là  $[\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle]$ .

#### **1.4. Thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm**

Trong phần này chúng ta sẽ áp dụng thuật toán nón xoay tuyến tính đã trình bày trong mục 1.3.1 xây dựng thuật riêng giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm.

##### **1.4.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm**

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu có hệ số không âm sau đây:

$$(M) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\ x \geq 0 \\ \langle C^i, x \rangle + d_i \leq 0, i=1, \dots, N \end{cases}$$

Trong đó  $x, C^i, C \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $C^i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ ,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là các véc tơ dòng bất kỳ,  $c_j, d_i \in \mathbb{R}^1$  với  $i=1, 2, \dots, N (N \geq 1)$ , và  $c_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n$ .

Ta viết lại bài toán quy hoạch tuyến tính (M) này ở dạng như bài toán (L) trong mục 1.1 và chúng ta gọi là bài toán  $(M_+)$ :

$$(M_+) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\ \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

trong đó:  $m = N+n$ ;

$$A^i = -E^i \quad (i=1, \dots, n); \quad b_i = 0 \quad (i=1, \dots, n);$$

$$A^{n+i} = C^i \quad (i=1, \dots, N); \quad b_{n+i} = d_i \quad (i=1, \dots, N);$$

Dễ thấy hạng của hệ véc tơ  $A^i$  ( $i=1, 2, \dots, m=n+N$ ) bằng  $n$  (vì có hệ con là hệ véc tơ đơn vị  $A^i = -E^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) là độc lập tuyến tính)

#### 1.4.2 Xây dựng nón – min (nón cực tiểu) xuất phát

Dễ dàng thấy, vì các hệ số của hàm mục tiêu bài toán  $(M_+)$  là không âm nên nón  $E_0 = \mathbb{R}_+^n$  chính là một nón – min đỉnh là gốc tọa độ  $O$ , các véc tơ chỉ phương của các cạnh là  $z_{M_0}^i = E^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Và do đó áp dụng thuật toán nón xoay tuyến tính trình bày trong phần trên, chúng ta thu được một thuật toán giải bài toán  $(M_+)$  trong mục sau đây.

#### 1.4.3. Thuật toán nón xoay tuyến tính LA giải bài toán qui hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu có hệ số không âm

Thuật toán nón xoay tuyến tính LA

**Bước chuẩn bị (bước 0).** Chọn nón – min ban đầu  $M_0 := E_0 = \square_+^n$ , đỉnh là  $x^{M_0} := E^0 = 0$ , tập chỉ số cơ sở  $I_0 := \{1, 2, \dots, n\}$ , các véc tơ chỉ phương của các cạnh của  $M_0$  là  $z_{M_0}^i = E^i$ , với  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Bước k (k=0, 1, 2, ...).** Giả sử  $M_k$  là nón - min của bài toán  $(M_+)$  (đã được xây dựng), với tập chỉ số cơ sở, đỉnh và các véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón  $M_k$  tương ứng là  $I_k := \{i_1^k, i_2^k, \dots, i_n^k\}$ ;  $x^k = x^{M_k}$  và  $z_k^i = z_{M_k}^i$ .

Xác định tập  $J^+(x^k)$  theo (1.6):  $J^+(x^k) := \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0\}$ .

1. Nếu  $J^+(x^k) = \emptyset$  thì dừng lại.  $x^k$  chính là một lời giải của bài toán  $(M)$ ,
2. Nếu  $J^+(x^k) \neq \emptyset$ , ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở theo một trong hai cách sau:

Ta chọn  $s_k$  là một chỉ số tùy ý thuộc  $J^+(x^k)$

hoặc ta chọn  $s_k = \min_{j: j \in J^+} x^k$  (gọi là qui tắc chọn *min*) hoặc  $s_k = \max_{j: j \in J^+} x^k$  (gọi là qui tắc chọn *max*) và xác định:

$$I^{s_k} := \{i \in I_k : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle \neq 0\}; I_+^{s_k} := \{i \in I^{s_k} : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle < 0\} = \{i_{s_k 1}^k, i_{s_k 2}^k, \dots, i_{s_k q_k}^k\}.$$

2.1. Nếu  $I_+^{s_k} = \emptyset$  thì dừng lại, suy ra bài toán  $(L)$  không có phương án.

2.2. Nếu  $I_+^{s_k} \neq \emptyset$ :

$$\text{Gọi } V^{s_k} := \{v \in I_+^{s_k} : -\frac{\langle C, z_k^v \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^v \rangle} = \min_{i \in I_+^{s_k}} \{-\frac{\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}\}\}$$

và chọn chỉ số đưa ra khỏi cơ sở theo một trong hai cách sau:

Ta chọn  $r_k$  là chỉ số tùy ý thuộc  $V^{s_k}$ .

hoặc ta chọn  $r_k = \min_{v: v \in V^{s_k}} v$  hoặc  $r_k = \max_{v: v \in V^{s_k}} v$

(cách chọn này gọi là qui tắc chọn *min* (hoặc là qui tắc chọn *max*)).

Và ta xây dựng nón xoay  $M_{k+1} = M_k(r_k, s_k)$  sinh ra từ nón-min  $M_k$ ,  $I_{k+1} = I_k \setminus \{r_k, s_k\} =$

$I_k \cup \{s_k\} \setminus \{r_k\}$ ; và các véc tơ chỉ phương  $z_{k+1}^i$  (theo (1.15)):

$$z_{k+1}^i = \begin{cases} z_k^i & \text{ khi } i \in I_k^0 \\ (z_k^i - \frac{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k}) & \text{ khi } i \in I_k^{s_k}, i \neq r_k \\ -\frac{1}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} & \text{ khi } i = s_k \end{cases} \quad (1.25)$$

$$x^{k+1} = x^{M_k(r_k, s_k)} = x_k^{r_k} = x^k - \frac{\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} = \sum_{i \in I_{k+1}} b_i \cdot z_{k+1}^i \quad (1.26)$$

Quay trở lại bước  $k$  với  $k \leftarrow k+1$

Sự hữu hạn bước của thuật toán đã được suy ra từ định lý 1.6 trong mục 1.3.1

#### 1.4.4. Lựa chọn chỉ số đưa vào cơ sở

Xét thuật toán nón xoay tuyến tính  $LA$  trình bày trong mục 1.4.3. ở trên, tại bước lặp  $k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) với  $J^+(x^k) \neq \emptyset$ , chúng ta giả sử

$$J^+ x^k := j \in 1, 2, \dots, m : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0 = s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kl_k}$$

Với mỗi  $s_{kj}$  ( $j=1, 2, \dots, l_k$ ), chúng ta có:

$$\langle A^{s_{kj}}, x^k \rangle + b_{s_{kj}} > 0, \forall j=1, 2, \dots, l_k$$

xác định các tập  $I^{s_{kj}}, I_+^{s_{kj}}, V^{s_{kj}}$  theo (1.20), (1.21) và (1.22) và chọn  $r_k(s_{kj})$  theo (1.23)

Theo định lý 1.5 thì với mỗi  $s_{kj}$  ( $j=1, 2, \dots, l_k$ ) nón  $M_k r_k s_{kj}, s_{kj}$  với tập chỉ số cơ sở mới tương ứng  $I_k r_k s_{kj}, s_{kj} = I_k \cup s_{kj} \setminus r_k s_{kj}$  là nón cực tiểu (Nón – min) của hàm mục tiêu bài toán  $(L)$ . Vì  $|J^+ x^k| = l_k$ , nên tại bước lặp  $k$ , chúng ta có  $l_k$  nón cực tiểu (Nón – min) của hàm mục tiêu. Trong các chỉ số  $s_{kj} \in J^+(x^k)$  ( $j=1, 2, \dots, l_k$ ) chúng ta gọi  $s_{kj_0}$  là chỉ số thoả mãn:

$$f(x_k^{r_k(s_{kj_0})}) = \max f(x_k^{r_k(s_{k1})}), f(x_k^{r_k(s_{k2})}), \dots, f(x_k^{r_k(s_{kl_k})}) \quad (1.27)$$

$$\text{Rõ ràng } f(x^{opt}) \geq f(x_k^{r_k(s_{kj_0})}) \geq f(x_k^{r_k(s_{kj})}) \geq f(x^k), \forall j=1, 2, \dots, l_k \quad (1.28)$$

$x^{opt}$  là lời giải của bài toán.

Sau đây tại mỗi bước lặp  $k$  chúng ta đề nghị cách chọn chỉ số đưa vào cơ sở mới trong thuật toán nón xoay tuyến tính ở chương 2 gọi là *qui tắc chọn cơ sở MAX* (hay nói ngắn gọn là *quy tắc MAX*):

$$\text{Gọi } J^+ x^k := j \in 1, 2, \dots, m : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0 = s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kl_k}$$

Xác định các tập  $I^{s_{kj}}, I_+^{s_{kj}}, V^{s_{kj}}$  theo (1.20), (1.21) và (1.22) và chọn  $r_k(s_{kj})$  theo (1.23), sau đó gọi  $s_{kj_0}$  là chỉ số thoả mãn (1.27), chúng ta thấy có hai khả năng:

1. Nếu  $f(x_k^{r_k(s_{kj_0})}) > f(x^k)$  thì chúng ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở mới là  $s_k = s_{kj_0}$  (1.29).

2. Nếu  $f(x_k^{r_k(s_{kj_0})}) = f(x^k)$  thì chúng ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở mới theo qui tắc *min*, tức là:

$$s_k = \min j : j \in J^+(x^k) \quad (1.30)$$

Từ (1.27), (1.28) và (1.29) cho chúng ta thấy nón-min  $M_{k+1}$  được xây dựng với hệ cơ sở mới  $I_{k+1} = (I_k \cup s_{kj_0}) \setminus r_k(s_{kj_0})$  và đỉnh tương ứng là  $x^{k+1} = x_k^{r_k(s_{kj_0})}$ . Theo (1.29) ta có  $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ . Điều này có nghĩa là giá trị  $f(x^{k+1})$  gần với giá trị  $f(x^{opt})$  hơn giá trị  $f(x^k)$ .

Khi giải các bài toán thực tế có kích thước lớn dưới dạng bài toán (L) theo thuật toán nón xoay tuyến tính LA thì việc chọn véc tơ đưa vào cơ sở theo quy tắc MAX trình bày trên sẽ làm cho số bước lặp giảm đi. Bởi sau mỗi bước lặp  $k$  nó sẽ bỏ qua hàng loạt các nón cực tiểu mà giá trị hàm mục tiêu tại đỉnh của chúng nằm trong khoảng  $f(x^k) ; f(x_k^{r_k(s_{kj_0})})$ . Điều này có nghĩa là số bước lặp của bài toán từ bước ban đầu cho đến bước cuối cùng thu được lời giải của bài toán sẽ giảm được rất nhiều các bước lặp so với việc mà tại mỗi bước lặp  $k$  chúng ta chọn một véc tơ có chỉ số  $s_k$  tùy ý của tập  $J^+ x^k$  để đưa vào cơ sở mới ở bước  $k+1$ .

#### 1.5. Cặp bài toán đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Trong phần này chúng ta trình bày cặp bài toán đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính và một số định lý đối ngẫu quan trọng có nhiều ứng dụng và cụ thể trong luận văn này ta sẽ sử dụng nó để từ chiến lược hỗn hợp tối ưu của người chơi này có thể suy ra chiến lược hỗn hợp tối ưu của người chơi kia trong bài toán trò chơi ma trận.

### 1.5.1. Cặp bài toán đối ngẫu

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau, ta ký hiệu là  $(P_1)$ :

$$(P_1) \quad f \quad x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Bài toán đối ngẫu của  $(P_1)$  là quy hoạch tuyến tính sau, ta ký hiệu là  $(P_2)$ , có dạng:

$$(P_2) \quad g \quad y = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \max$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Ở đây  $y = y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ biến cần tìm.

Ta nhận thấy:

+ Các ràng buộc chính trong quy hoạch ban đầu gọi là *quy hoạch gốc* (bài toán gốc) tương ứng một - một với các biến trong bài toán đối ngẫu (các biến đối ngẫu), và các biến trong quy hoạch gốc (biến gốc) sẽ tương ứng một - một với các ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

+ Các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán gốc trở thành các hệ số mục tiêu trong bài toán đối ngẫu, còn các hệ số mục tiêu trong bài toán gốc lại trở thành các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

+ Bài toán gốc tìm *min* thì bài toán đối ngẫu tìm *max* (và ngược lại).

+ Cả hai bài toán  $(P_1)$  và  $(P_2)$  đều có dạng chuẩn: mọi ràng buộc chính đều là các bất đẳng thức ( $\geq$  đối với bài toán min,  $\leq$  đối với bài toán max) và mọi biến đều không âm.

Với các ký hiệu véc tơ và ma trận, ta có thể viết

<b>Bài toán gốc</b>	<b>Bài toán gốc</b>
$f \quad x = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$	$g \quad y = \langle b, y \rangle \rightarrow \max$
$Ax \geq b,$	$A^T y \leq c,$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

( $A^T$  là ma trận chuyển vị của  $A$ ,  $\langle a, b \rangle$  là tích vô hướng của hai véc tơ  $a$  và  $b$ ).

### 1.5.2 Một số tính chất và định lý đối ngẫu

Ta nhắc lại các kết quả đối ngẫu nhận được dưới đây đối với cặp bài toán đối ngẫu ở dạng chuẩn, nó cũng đúng cho một cặp bài toán đối ngẫu dạng bất kỳ.

### Tính chất 1. (Đối ngẫu yếu)

Nếu  $x$  là một phương án bất kỳ của bài toán gốc ( $P_1$ ) và  $y$  là một phương án bất kỳ của bài toán đối ngẫu ( $P_2$ ) thì

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geq g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

### Tính chất 2. (Đối ngẫu mạnh)

Nếu một bài toán quy hoạch có phương án tối ưu thì bài toán quy hoạch đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng là bằng nhau.

Các kết quả nêu trên cho thấy mối quan hệ sau đây giữa hai bài toán gốc và đối ngẫu.

**Tính chất 3. (Định lý tồn tại)** Đối với mỗi cặp bài toán quy hoạch đối ngẫu nhau chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây:

- Cả hai bài toán quy hoạch đều không có phương án
- Cả hai bài toán quy hoạch đều có phương án. Khi đó, cả hai bài toán quy hoạch đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu là bằng nhau.
- Một bài toán quy hoạch có phương án và bài toán quy hoạch kia không có phương án. Khi đó bài toán quy hoạch có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn trên tập ràng buộc.

Mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu còn thể hiện ở các sự kiện cơ bản sau:

**Định lý yếu về độ lệch bù:** Một cặp phương án  $x, y$  của hai bài toán quy hoạch đối ngẫu ( $P_1$ ) và ( $P_2$ ) là những phương án tối ưu khi và chỉ khi chúng nghiệm đúng các hệ thức:

$$y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right) = 0 \quad \text{với mọi } i = 1, 2, \dots, m \quad (1.31)$$

$$x_j \left( c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \right) = 0 \quad \text{với mọi } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.32)$$

Hệ thức (1.31) có nghĩa là

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > b_i \Rightarrow y_i = 0 \quad \text{và} \quad y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$



Hệ thức (1.32) có nghĩa tương tự

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j < c_i \Rightarrow x_i = 0 \text{ và } x_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Các đẳng thức (1.31) và (1.32) không loại trừ khả năng là với một  $i$  nào đó ta có đồng thời  $y_i = 0$  và  $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i$ . Tuy nhiên định lý sau cho thấy khả năng này không thể xảy ra đối với tất cả các cặp phương án tối ưu đối ngẫu.

**Định lý mạnh về độ lệch bù:** Nếu cặp bài toán đối ngẫu  $(P_1)$  và  $(P_2)$  có phương án thì tồn tại một cặp phương án tối ưu  $x^*, y^*$  nghiệm đúng

$$y^* + Ax^* - b > 0 \text{ và } x^* + c - A^T y^* > 0$$

## 1.6. Bài toán trò chơi ma trận

Trong phần này chúng ta sẽ trình bày các khái niệm về trò chơi ma trận, chiến lược hỗn hợp tối ưu trong bài toán trò chơi ma trận và đưa bài toán trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

### 1.6.1. Khái niệm trò chơi ma trận

Để đơn giản chúng ta giả sử có hai người (đối thủ)  $P_1$  và  $P_2$  cùng chơi. người chơi thứ nhất  $P_1$  có  $m$  chiến lược (cách chơi), người chơi thứ hai  $P_2$  có  $n$  chiến lược, khi đó ta có một số khái niệm về trò chơi ma trận như sau:

**Định nghĩa 1.1:** Cho ma trận  $A = (a_{ij})$  cấp  $m \times n$ , có  $m$  hàng,  $n$  cột, với  $a_{ij}$  là các số thực tùy ý (cho trước). Trò chơi được xác định bởi ma trận  $A$  được gọi là *trò chơi ma trận*. Ma trận  $A$  gọi là *ma trận thu hoạch* (hay *ma trận thắng*, hay *ma trận trả tiền*). Phần tử  $a_{ij}$  biểu thị số tiền  $P_2$  trả cho  $P_1$  nếu  $P_1$  chọn cách chơi thứ  $i$  (hàng  $i$ ) và  $P_2$  chọn cách chơi thứ  $j$  (cột  $j$ ). Ma trận  $A$  còn gọi là *ma trận thu hoạch* của  $P_1$  ( $-A$  là ma trận thu hoạch của  $P_2$ ).

Ma trận  $A$  được xác định như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{ij}$$

**Định nghĩa 1.2:** Với mỗi  $i = 1, 2, \dots, m$  chiến lược đơn thứ  $i$  của  $P_1$ , kí hiệu  $i$ , là véc tơ  $m$ -chiều  $X = x_1, x_2, \dots, x_m$  với  $x_i = 1, x_k = 0, k \neq i$ , nghĩa là  $X$  là các véc tơ đơn vị thứ  $i$  trong  $\square^m$ . Nó biểu thị việc  $P_1$  chọn hàng  $i$  của ma trận  $A$ .

Tương tự, chiến lược đơn thứ  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) của  $P_2$  là véc tơ  $n$ -chiều  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  với  $y_j = 1, y_k = 0, k \neq j$ , nghĩa là  $Y$  là véc tơ đơn vị thứ  $j$  trong  $\square^n$ . Kí hiệu chiến lược đơn thứ  $j$  của  $P_2$  là  $j$ . Nó biểu thị việc  $P_2$  chọn cột  $j$  của ma trận  $A$ .

Trong các trò chơi ma trận, thông tin về cách chơi của mỗi đấu thủ cần được giữ kín, đồng thời số tiền thắng hay thua từ một cuộc chơi (gồm nhiều lần chơi) được tính như kết quả của các lần chơi. Bây giờ ở mỗi lần chơi, các đấu thủ không chọn cố định một chiến lược đơn (hàng, cột) cụ thể nào mà sẽ lựa chọn phối hợp các hàng (cột) theo một tỉ lệ (xác suất) nào đó. Vì thế, ta đi đến khái niệm *chiến lược hỗn hợp*.

**Định nghĩa 1.3:** Chiến lược hỗn hợp của  $P_1$  là véc tơ  $m$ -chiều  $X = x_1, x_2, \dots, x_m$  với  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$  và  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ , trong đó  $x_i$  biểu thị tỉ lệ hay xác suất để  $P_1$  chọn cách chơi thứ  $i$  (hàng  $i$ ). Tương tự, chiến lược hỗn hợp của  $P_2$  là véc tơ  $n$ -chiều  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  với  $y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$  và  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ , trong đó  $y_i$  biểu thị tỉ lệ hay xác suất để  $P_2$  chọn cách chơi thứ  $j$  (cột  $j$ ).

### 1.6.2 Hàm thu hoạch của $P_1$

Khi  $P_1$  chọn chiến lược hỗn hợp  $X = x_1, x_2, \dots, x_m$  và  $P_2$  chọn chiến lược hỗn hợp  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  thì phần thắng của  $P_1$  (cũng là phần thua của  $P_2$ ) được tính trung bình như sau:

Nếu  $P_2$  chọn chiến lược đơn thứ nhất thì kỳ vọng thắng cuộc của  $P_1$  là:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m$$

Nếu  $P_2$  chọn chiến lược đơn thứ hai thì kỳ vọng thắng cuộc của  $P_1$  là:

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m$$

.....

Nếu  $P_2$  chọn chiến lược đơn thứ  $n$  thì kỳ vọng thắng cuộc của  $P_1$  là:

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m$$

Do  $P_2$  chọn chiến lược hỗn hợp  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  nên kỳ vọng thắng cuộc của  $P_1$  là:

$$y_1 \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i + y_2 \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i + \dots + y_n \sum_{i=1}^m a_{in}x_i = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j$$

**Định nghĩa 1.4:** Ta gọi *hàm thu hoạch* hay *số thu hoạch* của  $P_1$  là số thực

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j$$

trong đó  $X = x_1, x_2, \dots, x_m$  và  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  là chiến lược hỗn hợp bất kỳ của  $P_1$  và  $P_2$  tương ứng.

### 1.6.3. Điểm yên ngựa và chiến lược tối ưu

#### 1.6.3.1. Điểm yên ngựa

Xét trò chơi cho bởi ma trận thu hoạch  $A = a_{ij}$ .

**Định nghĩa 1.5:** Nếu ma trận trả tiền  $A$  thỏa mãn điều kiện:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{hk} = v$$

thì ta nói rằng trò chơi ma trận có điểm yên ngựa và điểm yên ngựa là phần tử  $a_{hk}$ .

Khi trò chơi có điểm yên ngựa  $a_{hk}$ ,  $P_1$  sẽ thắng ít nhất  $v$  nếu  $P_1$  chọn chiến lược đơn  $h$ ,  $P_2$  sẽ thua nhiều nhất  $v$  nếu  $P_2$  chọn chiến lược đơn  $k$ . Khi đó,  $h$  là chiến lược tối ưu cho  $P_1$  và  $k$  là chiến lược tối ưu cho  $P_2$ . Thật vậy, nếu  $P_1$  chọn chiến lược đơn khác  $h$  trong khi  $P_2$  chọn  $k$  thì số thu hoạch của  $P_1$  không tăng mà còn có thể giảm. Cũng vậy, nếu  $P_2$  không chọn chiến lược đơn  $k$  trong khi  $P_1$  chọn  $h$  thì số tiền  $P_2$  phải trả cho  $P_1$  không giảm mà còn có thể tăng.

Chúng ta có thể có nhiều ví dụ chứng tỏ không phải trò chơi ma trận nào cũng có điểm yên ngựa, nghĩa là có chiến lược đơn tối ưu. Vì thế ta cần đi đến khái niệm *chiến lược hỗn hợp tối ưu*.

### 1.6.3.2. Chiến lược tối ưu

**Định nghĩa 1.6.** Lời giải của trò chơi ma trận là cặp chiến lược hỗn hợp  $\bar{X} = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ ,  $\bar{Y} = \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$  và số thực  $v$  sao cho:

- a)  $E \bar{X}, \bar{Y} = v$
- b)  $E \bar{X}, j \geq v$  với mọi chiến lược đơn  $j = 1, 2, \dots, n$ .
- c)  $E i, \bar{Y} \leq v$  với mọi chiến lược đơn  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$\bar{X}, \bar{Y}$  gọi là chiến lược tối ưu của  $P_1$  và  $P_2$  tương ứng. Số  $v$  gọi là *giá* của trò chơi.

Định nghĩa trên cho thấy nếu  $P_1$  chọn cách chơi theo tỉ lệ cho bởi chiến lược tối ưu  $\bar{X}$  thì dù  $P_2$  chơi như thế nào,  $P_1$  vẫn luôn thắng ít nhất là  $v$ . Cũng vậy, nếu  $P_2$  chọn cách chơi theo tỉ lệ cho bởi chiến lược tối ưu  $\bar{Y}$  thì dù  $P_1$  chơi như thế nào,  $P_2$  chỉ thua nhiều nhất là  $v$ . Giá  $v$  có thể dương, âm hoặc bằng 0.

Định lý sau đây cho thấy mọi trò chơi ma trận đều có lời giải.

**Định lý minimax:** Đối với mọi trò chơi ma trận bao giờ cũng tồn tại  $\max_X \min_Y E X, Y$ ,  $\min_Y \max_X E X, Y$  và hai giá trị này bằng nhau.

Nói cách khác, mọi trò chơi ma trận đều có nghiệm  $[\bar{X}, \bar{Y}, v]$  sao cho:

$$E X, \bar{Y} \leq E \bar{X}, \bar{Y} = v \leq E \bar{X}, Y \text{ với mọi cặp chiến lược hỗn hợp } X, Y.$$

Như vậy, với trò chơi ma trận bất kỳ mỗi đối thủ đều có chiến lược tối ưu  $\bar{X}, \bar{Y}$  sao cho số tiền thắng nhỏ nhất của  $P_1$  bằng số tiền thua lớn nhất của  $P_2$  và bằng  $v$ .

**Nhận xét:** Nếu ma trận trả tiền  $A$  có phần tử âm thì ta có thể thay nó bằng ma trận  $A_\alpha = [a_{ij} + \alpha] > 0$  (mọi phần tử của  $A_\alpha$  đều dương) bằng cách chọn số  $\alpha$  thích hợp, chẳng

hạn  $\alpha > -\min a_{ij} : a_{ij} < 0$ . Có thể chứng minh rằng các chiến lược tối ưu trong cả hai trò chơi (với ma trận trả tiền  $A$  và  $A_\alpha$ ) là như nhau, đồng thời  $v_\alpha = v + \alpha > 0$ .

### 1.7. Đưa trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Trong phần này chúng ta sẽ trình bày cách đưa việc tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu của bài toán trò chơi ma trận về việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm.

#### 1.7.1 Đưa bài toán trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét trò chơi ma trận  $A = a_{ij}_{m \times n}$ . Theo các định nghĩa 1.4 và 1.6 thì bài toán của  $P_1$  là tìm các véc tơ  $X = x_1, x_2, \dots, x_m$  và số  $v$  sao cho:

$$v \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 1)}$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 2)}$$

.....

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột } n \text{)}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Ngược lại, bài toán của  $P_2$  là tìm véc tơ  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  và số  $v$  sao cho

$$v \rightarrow \min$$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 1)}$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 2)}$$

.....

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng } m \text{)}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết mọi  $a_{ij} > 0$  và vì thế  $v > 0$ . Bằng cách đặt

$$x'_i = \frac{x_i}{v}, i = 1, 2, \dots, m \text{ và } y'_j = \frac{y_j}{v}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ta có:  $x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m = \frac{1}{v}$  và  $y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n = \frac{1}{v}$ .

Ta thấy  $v$  là số tiền mà  $P_1$  nhận được và  $v$  cũng là số tiền mà  $P_2$  phải trả, nên  $P_1$  tìm cách làm cực đại  $v$  hay cực tiểu  $\frac{1}{v}$  còn  $P_2$  tìm cách làm cực tiểu  $v$  hay cực đại  $\frac{1}{v}$ .

Vì thế ta có cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu:

**Bài toán của người chơi  $P_1$ :**  $f_1 = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m \rightarrow \min$

$$a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{m1}x'_m \geq 1 \text{ (cột 1)}$$

$$a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{m2}x'_m \geq 1 \text{ (cột 2)}$$

.....

$$a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_m \geq 1 \text{ (cột n)}$$

$$x'_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

**Bài toán của người chơi  $P_2$ :**  $f_2 = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \rightarrow \max$

$$a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 1)}$$

$$a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + \dots + a_{2n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 2)}$$

.....

$$a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \dots + a_{mn}y'_n \leq 1 \text{ (hàng m)}$$

$$y'_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Nhận xét:**

+ Hai bài toán trên lập thành một cặp bài toán quy hoạch đối ngẫu nhau. Hơn nữa, rõ ràng cả hai bài toán đều có phương án, nên theo định lý tồn tại cả hai đều có phương án tối ưu ( lời giải) và

$$\min_{x'} \sum_{i=1}^m x'_i = \max_{y'} \sum_{j=1}^n y'_j = \frac{1}{v}$$

(số tiền thắng nhỏ nhất của  $P_1$  bằng số tiền thua lớn nhất của  $P_2$ ).

+ Chiến lược tối ưu của  $P_1, P_2$  tương ứng là:

$$x_i = v \times x'_i, i = 1, 2, \dots, m \text{ và } y_j = v \times y'_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Rõ ràng bài toán của người chơi  $P_1$  là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn có hệ số của hàm mục tiêu không âm nên ta có thể sử dụng thuật toán LA trình bày trong

mục 1.4.3. để giải trực tiếp nó với cơ sở xuất phát từ gốc tọa độ  $O(0, 0, \dots, 0)$  là đỉnh của nón cực tiểu chính là nón Ortang dương  $\square_n^+$ .

Sau đây là ví dụ minh họa được giải lại bằng thuật toán  $LA$ , từ đó ta so sánh với phương pháp đơn hình đã giải nó trong [2].

### 1.7.2. Ví dụ minh họa[2]

Tìm chiến lược tối ưu của  $P_1$  và  $P_2$  với ma trận trò chơi là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta thấy  $-\min a_{ij} : a_{ij} < 0 = 2$ , vì thế ta chọn  $\alpha = 3$  và thay  $A$  bởi ma trận

$$A_\alpha = [a_{ij} + \alpha] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} > 0$$

Mọi phần tử của  $A_\alpha$  đều dương nên  $v_\alpha > 0$ .

Cặp bài toán đối ngẫu của  $P_1$  và  $P_2$ :

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ 5x'_1 + 4x'_2 \geq 1 \\ 4x'_1 + 3x'_2 \geq 1 \\ 3x'_1 + 6x'_2 \geq 1 \\ x'_1 + 5x'_2 \geq 1 \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2 = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 \rightarrow \max \\ 5y'_1 + 4y'_2 + 3y'_3 + y'_4 \leq 1 \\ 4y'_1 + 3y'_2 + 6y'_3 + 5y'_4 \leq 1 \\ y'_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y'_3 \geq 0, y'_4 \geq 0 \end{cases}$$

Theo thuật toán nón xoay tuyến tính  $LA$  ta có nón cực tiểu ban đầu của bài toán chính là nón Ortang dương  $\square_+^2$  với đỉnh là gốc tọa độ  $O(0,0)$  có tập chỉ số cơ sở là  $\{1,2\}$ , chúng ta có bảng nón xoay lặp thu gọn cho lời giải bài toán sau 2 bước lặp như sau:

Chỉ số	$b_j$	1	1	$A^j(x^0)$	$A^j(x^1)$	$A^j(x^2)$
1	0	-1	0	0	0	-2/17
2	0	0	-1	0	-1/5	-3/17
3	1	-5	-4	1	1/5	-5/17
4	1	-4	-3	1	(2/5)	0
5	1	-3	-6	1	-1/5	-7/17

6	1	-1 -5	(1)	0	0
1	0	1 0	-1	1	
(2)	0	0 1	<b>[-5]</b>	(1/5)	
Bước 0	$x^0$	0 0			
(1)	0	1 -1/5	<b>[-17/5]</b>	(4/17)	
6	1	0 1/5	-3/5	1/3	
Bước 1	$x^1$	0 1/5			
4	1	5/17 -1/17			
6	1	-3/17 4/17			
Bước 2	$x^2$	2/17 3/17			

Vậy giá của trò chơi  $v^* = v_\alpha - \alpha = \frac{17}{5} - 3 = \frac{2}{5}$

Chiến lược tối ưu của  $P_1$ :  $x^* = v_\alpha x' = \frac{17}{5} \left( \frac{2}{17}, \frac{3}{17} \right) = \left( \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)$

Từ định lý yếu về độ lệch bù và các kết quả tính toán ở cột cuối cùng trong bảng nón xoay thu gọn trên ta có hệ phương trình sau cho lời giải của người chơi  $P_2$

$$\begin{cases} 5y'_1 + 4y'_2 + 3y'_3 + y'_4 = 1 \\ 4y'_1 + 3y'_2 + 6y'_3 + 5y'_4 = 1 \\ y'_1 = 0 \\ y'_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $y' \left( 0; \frac{4}{17}; 0; \frac{1}{17} \right)$ .

Vậy chiến lược tối ưu của  $P_2$ :  $y^* = v_\alpha y' = \frac{17}{5} \left( 0, \frac{4}{17}, 0, \frac{1}{17} \right) = \left( 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$

Nếu giải bài toán này theo phương pháp đơn hình đối ngẫu thì chúng ta sẽ đưa bài toán gốc về dạng chính tắc bằng cách thêm 4 ẩn phụ  $x'_3, x'_4, x'_5, x'_6 \geq 0$ , ta được bài toán:



$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ -5x'_1 - 4x'_2 + x'_3 = -1 \\ -4x'_1 - 3x'_2 + x'_4 = -1 \\ -3x'_1 - 6x'_2 + x'_5 = -1 \\ -x'_1 - 5x'_2 + x'_6 = -1 \\ x'_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

Giả phương án ban đầu  $x^1 = 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1$ . Cơ sở đối ngẫu  $J = 3, 4, 5, 6$ .

Quá trình giải bài toán theo thuật toán đơn hình đối ngẫu được ghi ở 4 bảng sau:

Biến cơ sở	Hệ số mục tiêu	Giá phương án	$x'_1$	$x'_2$	$x'_3$	$x'_4$	$x'_5$	$x'_6$
			1	1	0	0	0	0
$x'_3$	0	-1	-5	-4	1	0	0	0
$x'_4$	0	-1	-4	-3	0	1	0	0
$x'_5$	0	-1	-3	-6	0	0	1	0
$x'_6$	0	-1	-1	-5	0	0	0	1
Bảng 1		0	-1	-1	0	0	0	0
$x'_1$	1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0
$x'_4$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0	0

$x'_5$	0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{18}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	0
$x'_6$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{21}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1
Bảng 2		$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0
$x'_1$	1	$\frac{1}{21}$	1	0	$-\frac{5}{21}$	0	0	$\frac{4}{21}$
$x'_4$	0	$-\frac{5}{21}$	0	0	$-\frac{17}{21}$	1	0	$\frac{1}{21}$
$x'_5$	0	$\frac{6}{21}$	0	0	$-\frac{9}{21}$	0	1	$-\frac{18}{21}$
$x'_2$	1	$\frac{4}{21}$	0	1	$\frac{1}{21}$	0	0	$-\frac{5}{21}$
Bảng 3		$\frac{5}{21}$	0	0	$-\frac{4}{21}$	0	0	$-\frac{1}{21}$
$x'_1$	1	$\frac{2}{17}$	1	0	0	$-\frac{5}{17}$	0	$\frac{3}{17}$
$x'_3$	0	$\frac{5}{17}$	0	0	1	$-\frac{21}{17}$	0	$-\frac{1}{17}$
$x'_5$	0	$\frac{7}{17}$	0	0	0	$-\frac{9}{17}$	1	$-\frac{15}{17}$
$x'_2$	1	$\frac{3}{17}$	0	1	0	$\frac{1}{17}$	0	$-\frac{4}{17}$
Bảng 4		$\frac{5}{17}$	0	0	0	$-\frac{4}{17}$	0	$-\frac{1}{17}$

Từ đó suy ra lời giải của trò chơi đã cho như kết quả trên:

+ Chiến lược tối ưu của  $P_1$ :  $x^* = v_\alpha x' = \frac{17}{5} \left( \frac{2}{17}, \frac{3}{17} \right) = \left( \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)$

+ Chiến lược tối ưu của  $P_2$ :  $y^* = v_\alpha y' = \frac{17}{5} \left( 0, \frac{4}{17}, 0, \frac{1}{17} \right) = \left( 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$

+ Giá của trò chơi:  $v^* = v_\alpha - \alpha = \frac{17}{5} - 3 = \frac{2}{5}$

Rõ ràng lời giải được của bài toán tìm theo bảng lặp nón xoay bởi thuật toán LA có số bước lặp và số phép tính toán trong mỗi bước lặp là ít hơn phương pháp đơn hình đối ngẫu.

## **Chương 2**

### **THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN KHI SỐ CHIẾN LƯỢC CỦA MỘT TRONG HAI NGƯỜI CHƠI LÀ HAI**

Trong chương 1, chúng ta đã trình bày thuật toán nón xoay  $LA$  giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm. Từ đó ứng dụng nó để tìm chiến lược tối ưu của bài toán trò chơi ma trận trong trường hợp tổng quát với ma

trận thu hoạch  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  có  $m$  hàng,  $n$  cột bất kỳ, tức là số chiến lược của từng người chơi  $P_1$  và  $P_2$  là tùy ý.

Để khai thác được đặc thù riêng khi bài toán trò chơi ma trận có số chiến lược của một trong hai người chơi là hai thì chúng ta có thể cải tiến cụ thể hóa thuật toán  $LA$  với sự lựa chọn chỉ số đưa vào cơ sở theo quy tắc  $Max$  đề nghị trong mục 1.4.4. của chương 1, từ đó ta nhận được một phương pháp tìm chiến lược tối ưu trong trường hợp này rất hiệu quả so với phương pháp đồ thị và các phương pháp khác.

Do thời gian có hạn nên dưới đây chúng ta sẽ chỉ xét và giải quyết bài toán trò chơi ma trận trong trường hợp người chơi  $P_1$  sử dụng 2 chiến lược còn người chơi  $P_2$  sử dụng  $n$  chiến lược, tức ma trận thu hoạch  $A = (a_{ij})_{2 \times n}$ . Và cũng bằng những lý luận dưới đây chúng ta cũng sẽ thu được một phương pháp tương tự để giải quyết bài toán trò chơi ma trận trong trường hợp người chơi  $P_2$  sử dụng 2 chiến lược còn người chơi  $P_1$  sử dụng  $m$  chiến lược, tức ma trận thu hoạch  $A = (a_{ij})_{m \times 2}$ .

### **2.1. Bài toán trò chơi ma trận khi người chơi $P_1$ sử dụng hai chiến lược**

Chúng ta đã biết, để tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu của bài toán trò chơi ma trận (trong phần 1.7. của chương 1), chúng ta có thể đưa về việc giải cặp bài toán đối ngẫu tương ứng. Chính vì vậy trong phần này chúng ta chỉ trình bày việc xây dựng phương pháp giải bài toán trò chơi ma trận của người chơi  $P_1$  (từ đó có thể suy ra lời giải của người chơi  $P_2$  tương ứng theo định lý yếu độ lệch bù).

Xét cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu tương ứng khi người chơi  $P_1$  sử dụng hai chiến lược:

**Bài toán của người chơi  $P_1$ :**

$$f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min$$

$$a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 \geq 1 \text{ (cột 1)}$$

$$a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 \geq 1 \text{ (cột 2)}$$

.....

$$a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 \geq 1 \text{ (cột } n)$$

$$x'_i \geq 0, i=1,2.$$

Ta ký hiệu  $x' = x'_1, x'_2$ ,  $A^j = (a_{1j}; a_{2j})$ , và gọi  $D_I$  là miền ràng buộc hay là miền chấp nhận được của bài toán  $P_I$  trên, thì khi đó ta có thể viết gọn:

$$D_I = \{x' \in \mathbb{R}^2 : x' \geq 0; \langle A^j, x' \rangle - 1 \geq 0, j=1,2,\dots,n\}$$

Và với mỗi  $j=1, 2, \dots, n$  ta gọi  $D_j$  là khúc lồi tuyến tính:

$$D_j = \{x' \in \mathbb{R}^2 : x' \geq 0; \langle A^j, x' \rangle - 1 \geq 0, j=1,2,\dots,n\}$$

Có hai điểm cực biên là  $x^{1j} = \left(\frac{1}{a_{1j}}; 0\right)$  và  $x^{2j} = \left(0; \frac{1}{a_{2j}}\right)$ .

**Định lý 2.1:**  $\forall j \in 1,2,\dots,n$  và  $\forall x^0 \in D_I$ , nếu  $x^0$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j$ :

$a_{1j} \cdot x_1^0 + a_{2j} \cdot x_2^0 - 1 = 0$ , thì ta có  $x^0 = \alpha_0 \cdot x^{1j} + (1 - \alpha_0) \cdot x^{2j}$ , tức là  $x^0 \in [x^{1j}; x^{2j}]$ .

Chúng minh: Vì  $x^0$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j$  nên ta có

$$a_{1j} \cdot x_1^0 + a_{2j} \cdot x_2^0 - 1 = 0 \text{ với } x_1^0 \geq 0, x_2^0 \geq 0 \quad (2.1)$$

Vậy ta đặt  $\alpha_0 = a_{1j} \cdot x_1^0 = 1 - a_{2j} \cdot x_2^0$ , rõ ràng từ (2.1) ta suy ra  $\alpha_0 \in [0;1]$ , khi đó dễ dàng kiểm tra được  $x^0 = \alpha_0 \cdot x^{1j} + (1 - \alpha_0) \cdot x^{2j}$ .

**Bài toán của người chơi  $P_2$ :**

$$f_2 = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \rightarrow \max$$

$$a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 1)}$$

$$a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + \dots + a_{2n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 2)}$$

$$y'_j \geq 0, j=1,2,\dots,n.$$

Ta gọi  $D_2$  là miền ràng buộc hay là miền chấp nhận được của bài toán  $P_2$ .

Ta đã biết trong chương 1 miền ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính ( $L$ ) là

$$P_L := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i=1,2,\dots,m\}$$

Giả sử  $P_L \neq \emptyset$ , nếu tồn tại  $x \in P_L$  thỏa mãn chặt ràng buộc thứ  $i$  tức là  $\langle A^i, x \rangle + b_i = 0$  thì ta nói ràng buộc  $i$  được gọi là ràng buộc biên của  $P_L$ . Ngược lại nếu  $\forall x \in P_L$  mà

$\langle A^i, x \rangle + b_i < 0$  thì ràng buộc  $i$  gọi là ràng buộc lỏng của  $P_L$ . Nhiều lớp bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong  $m$  ràng buộc tham gia xác định  $P_L$  của bài toán  $(L)$  thì có khá nhiều ràng buộc là ràng buộc lỏng của  $P_L$  (những ràng buộc lỏng là những ràng buộc thừa của bài toán  $(L)$ ).

## 2.2. Phương pháp giải trực tiếp bài toán của người chơi $P_I$

Bây giờ ta xây dựng phương pháp giải trực tiếp bài toán của người chơi  $P_I$  gọi là phương pháp TT như sau:

Ý tưởng của phương pháp TT giải bài toán như sau:

Vì hàm mục tiêu của bài toán  $P_I$  có các hệ số đều bằng nhau và bằng 1, các ràng buộc đều có tất cả các hệ số đều dương nên nón cực tiểu ban đầu chính là nón Ortang dương  $\square_+^2$  với đỉnh của nón chính là gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Từ nón này ta xây dựng nón xoay mới theo quy tắc lựa chọn ràng buộc cắt có chỉ số đã đưa ra trong mục 1.4.4 và nếu ràng buộc này là một ràng buộc biên thì ta chứng minh được rằng ràng buộc biên này sẽ chứa ít nhất một lời giải của bài toán. Do đó bài toán  $P_I$  sẽ được đưa về bài toán một biến và dễ dàng chỉ ra nghiệm của bài toán.

### Phương pháp TT

Gọi  $J_1 := \{j \in 1, 2, \dots, n : a_{2j} \leq a_{1j}\}$

Nếu  $J_1 \neq \emptyset$ , với mỗi  $j \in J_1$ , ta có  $\frac{1}{a_{1j}} \leq \frac{1}{a_{2j}}$  (2.1)

Xét khúc lồi tuyến tính xác định bởi:

$$D_{1j} := \{x' \in \square_+^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j} \cdot x'_1 + a_{2j} \cdot x'_2 - 1 \geq 0\}$$

Có hai điểm cực biên là  $x^{1j} = \left(\frac{1}{a_{1j}}; 0\right)$  và  $x^{2j} = \left(0; \frac{1}{a_{2j}}\right)$ .

Từ (2.1) dễ dàng suy ra

$$f_1 x^{1j} \leq f_1 x^{2j}, \quad \forall j \in J_1 \quad (2.2)$$

Vậy nón đơn hình  $N_{1j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j}.x'_1 + a_{2j}.x'_2 - 1 \geq 0$  có đỉnh là  $x^{1j} = \left( \frac{1}{a_{1j}}; 0 \right)$  chính là một nón cực tiểu của hàm mục tiêu của bài toán người chơi  $P_I$  và

do đó nó chính là lời giải của bài toán:

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ x \in D_{1j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j}.x'_1 + a_{2j}.x'_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Gọi  $J_2 := j \in 1, 2, \dots, n : a_{1j} < a_{2j}$

Với mỗi  $j \in J_2$ , ta có  $\frac{1}{a_{2j}} < \frac{1}{a_{1j}}$  (2.4)

Xét khúc lồi tuyến tính xác định bởi:

$$D_{2j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j}.x'_1 + a_{2j}.x'_2 - 1 \geq 0$$

Có hai điểm cực biên là  $x^{2j} = (1/a_{1j}, 0)$  và  $x^{2j} = (0, 1/a_{2j})$

Từ (2.4) dễ dàng suy ra

$$f_1 x^{2j} < f_1 x^{1j}, \quad \forall j \in J_2 \quad (2.5)$$

Vậy nón đơn hình  $N_{2j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j}.x'_1 + a_{2j}.x'_2 - 1 \geq 0$  có đỉnh là  $x^{2j} = \left( 0; \frac{1}{a_{2j}} \right)$  chính là một nón cực tiểu của hàm mục tiêu của bài toán người chơi  $P_I$  và

do đó nó chính là lời giải của bài toán:

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ x \in D_{2j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j}.x'_1 + a_{2j}.x'_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ta có các khả năng sau:

**II/ Nếu  $J_2 \neq \emptyset$  tức  $J_1 = \{ 1, 2, \dots, n \}$ , vậy theo (2.1):**

$$\frac{1}{a_{1j}} \leq \frac{1}{a_{2j}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Gọi  $j_0$  là chỉ số thỏa mãn  $\frac{1}{a_{1j_0}} = \max \left\{ \frac{1}{a_{1j}} : j = 1, 2, \dots, n \right\}$  (nếu có nhiều chỉ số thỏa mãn thì ta chọn  $j_0$  là chỉ số nhỏ nhất trong những chỉ số thỏa mãn)

do đó  $\frac{1}{a_{1j_0}} \geq \frac{1}{a_{1j}} \Leftrightarrow \frac{a_{1j}}{a_{1j_0}} \geq 1, \forall j = 1, 2, \dots, n$ . Từ điều này dễ dàng suy ra điểm

$x^{1j_0} = \left( \frac{1}{a_{1j_0}}, 0 \right)$  là một phương án của bài toán của người chơi  $P_I$

Mặt khác khúc lồi tuyến tính

$$D_{j_0} = \begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ x \in D_{1j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j} \cdot x'_1 + a_{2j} \cdot x'_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{có 2 điểm cực}$$

biên là  $x^{1j_0} = \left( \frac{1}{a_{1j_0}}, 0 \right)$  và  $x^{2j_0} = \left( 0, \frac{1}{a_{2j_0}} \right)$  mà  $j_0 \in J_1$  nên ta có

$$\frac{1}{a_{1j_0}} \leq \frac{1}{a_{2j_0}} \Leftrightarrow f_1 x^{1j_0} \leq f_1 x^{2j_0}$$

Mà ta đã biết lời giải của bài toán quy hoạch tuyến tính đạt ở ít nhất một điểm cực biên của miền ràng buộc, nên  $x^{1j_0} = \left( \frac{1}{a_{1j_0}}, 0 \right)$  chính là một lời giải của bài toán

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ x \in D_{1j} := x' \in \square^2 : x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; a_{1j} \cdot x'_1 + a_{2j} \cdot x'_2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Rõ ràng miền ràng buộc của bài toán của người chơi  $P_I$  nằm trong khúc lồi tuyến tính  $D_{j_0}$ , vậy suy ra  $x^{1j_0} = \left( \frac{1}{a_{1j_0}}, 0 \right)$  chính là một lời giải của bài toán của người chơi  $P_I$ .

**II/** Nếu  $J_1 = \emptyset$  tức  $J_2 = \{1, 2, \dots, n\}$ , hoàn toàn lý luận tương tự như trên ta suy ra  $x^{2j_0} = \left( 0, \frac{1}{a_{2j_0}} \right)$  chính là một lời giải của bài toán của người chơi  $P_I$ .

**III/** Nếu  $J_1 \neq \emptyset$  và  $J_2 \neq \emptyset$  :



Gọi  $j_1 \in J_1$  là chỉ số thỏa mãn

$$\frac{1}{a_{1j_1}} = \max \left\{ \frac{1}{a_{1j}} : \forall j \in J_1 \right\} \quad (2.7)$$

(nếu có nhiều chỉ số thỏa mãn (2.7) thì ta chọn  $j_1$  là chỉ số nhỏ nhất trong những chỉ số thỏa mãn).

Gọi  $j_2 \in J_2$  là chỉ số thỏa mãn

$$\frac{1}{a_{2j_2}} = \max \left\{ \frac{1}{a_{2j}} : \forall j \in J_2 \right\} \quad (2.8)$$

(nếu có nhiều chỉ số thỏa mãn (2.8) thì ta chọn  $j_2$  là chỉ số nhỏ nhất trong những chỉ số thỏa mãn).

Gọi  $J^+ x^{1j_1} := j \in 1, 2, \dots, n : \langle A^j, x^{1j_1} \rangle - 1 < 0$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nếu ràng buộc  $j_1 a_{1j_0} x'_1 + a_{2j_0} x'_2 - 1 \geq 0$  là một ràng buộc biên của bài toán của người chơi  $P_I$  thì bài toán này luôn có lời giải thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_1$ .

**Định lý 2.2:** Nếu ràng buộc  $j_1 a_{1j_0} x'_1 + a_{2j_0} x'_2 - 1 \geq 0$  là một ràng buộc biên của bài toán của người chơi  $P_I$  thì bài toán này luôn có lời giải thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_1$ .

Chứng minh:

Vì ràng buộc  $j_1 a_{1j_0} x'_1 + a_{2j_0} x'_2 - 1 \geq 0$  là một ràng buộc biên nên tồn tại ít nhất một điểm chấp nhận  $x^0$  của miền ràng buộc bài toán của người chơi  $P_I$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_1$ , vậy theo định lý 2.1 ta có :  $x^0 \in [x^{1j_1}; x^{2j_2}]$ .

Lại vì  $j_1 \in J_1$  nên theo (2.2) ta dễ dàng suy ra:

$$f_1 x^{1j_1} \leq f_1 x^0 \leq f_1 x^{2j_2} \quad (2.9)$$

Ta thấy nếu  $J^+ x^{1j_1} \neq \emptyset$  thì  $x^{1j_1}$  chính là lời giải của bài toán  $P_I$ .

Vậy nếu  $J^+ x^{1j_1} \neq \emptyset$  thì đoạn thẳng  $[x^0; x^{1j_1}]$  sẽ giao với biên của miền chấp nhận của bài toán  $P_I$  tại một điểm. Ta gọi ràng buộc  $s$  là ràng buộc biên tương ứng của miền

chấp nhận  $D_I$  giao với đoạn  $[x^0; x^{1j_i}]$  mà tại điểm  $x^s \in D_I$ . Do đó  $x^s \in D_I \subset [x^0; x^{1j_i}]$ , từ (2.9) suy ra

$$f_1 x^{1j_i} \leq f_1 x^0 \leq f_1 x^{2j_i} \quad (2.10)$$

Lại có  $\langle A^s, x^s \rangle - 1 = 0$

Mà  $x^s \in D_I$  nên theo định lý 2.1 thì

$$x^s \in D_I = \alpha_s x^{1s} + (1 - \alpha_s) x^{2s}, \alpha_s \in [0; 1] \quad (2.11)$$

Trong đó  $x^{1s} = (1/a_{1s}, 0)$  và  $x^{2s} = (0, 1/a_{2s})$  là hai điểm cực biên của khúc lồi tuyến tính:

$$D_s := \{x' \in \mathbb{R}^2 : x' \geq 0; \langle A^s, x' \rangle - 1 \geq 0\}$$

Vì  $s \in J^+$  nên ta có

$$\langle A^s, x^{1j_i} \rangle - 1 < 0 \Leftrightarrow a_{1s} \cdot \frac{1}{a_{1j_i}} + a_{2s} \cdot 0 - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_{1j_i}} < \frac{1}{a_{1s}} \quad (2.12)$$

điều này suy ra  $s \in J_2$  vì nếu  $s \in J_1$  thì theo (2.1) ta có

$$\frac{1}{a_{1s}} \leq \frac{1}{a_{2s}} \quad (2.13)$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thấy mâu thuẫn với (2.7). Do đó phải có  $s \in J_2$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{a_{2s}} < \frac{1}{a_{1s}} \Leftrightarrow f_1 x^{2s} < f_1 x^{1s} \quad (2.14)$$

Từ (2.11) và (2.14) suy ra

$$f_1 x^{2s} \leq f_1 x^s \in D_I \leq f_1 x^{1s} \quad (2.15)$$

Mà  $x^s \in D_I$  thỏa mãn chặt hai ràng buộc  $s$  và  $j_i$  nên nó chính là đỉnh của nón đơn hình  $N_{sj_i} := \{x' \in \mathbb{R}^2 : \langle A^{j_i}, x' \rangle > -1; \langle A^s, x' \rangle - 1 \geq 0\}$  với hai véc tơ chỉ phương là  $z^{j_i} = x^{2j_i} - x^{1j_i}$  và  $z^s = x^{1s} - x^{2s}$ , từ (2.9) và (2.15) chúng tỏ  $z^{j_i}$  và  $z^s$  là hai hướng không giảm của hàm mục tiêu bài toán  $P_I$ , vậy nón  $N_{sj_i}$  là nón cực tiểu của bài toán  $P_I$ . Suy ra  $x^s \in D_I$  chính là một lời giải của bài toán  $P_I$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_i$ .

Lý luận tương tự như trên nếu ràng buộc  $j_2$ :  $a_{1j_2}.x'_1 + a_{2j_2} - 1 \geq 0$  là một ràng buộc biên của bài toán của người chơi  $P_I$  thì bài toán này luôn có lời giải thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_2$ .

Từ định lý 2.2 ta thấy có hai khả năng sau:

**III.1/** Nếu  $\frac{1}{a_{2j_2}} \leq \frac{1}{a_{1j_2}}$  thì ta chọn ràng buộc ứng với chỉ số  $j_I$  thỏa mãn (2.7) và thấy

có hai khả năng: hoặc ràng buộc  $j_I$  là ràng buộc biên chứa lời giải của bài toán  $P_I$  hoặc nó là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ . Vậy ta tiến hành tính toán như sau để tìm được  $x^* = x_1^*; x_2^*$  là lời giải của bài toán  $P_I$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_I$  hoặc biết nó là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$  của bài toán  $P_I$  và loại nó ra khỏi miền ràng buộc  $D_I$ .

Từ  $a_{1j_1}.x_1^* + a_{2j_1}.x_2^* - 1 = 0$  ta thay  $x_1^* = \frac{1}{a_{1j_1}} (1 - a_{2j_1}.x_2^*)$  vào hàm mục tiêu và các ràng

buộc của bài toán  $P_I$  và đưa việc giải bài toán  $P_I$  về việc giải bài toán một biến tương đương sau:

$$f_1(x^*) = f_1(x_1^*) = \frac{a_{1j_1} - a_{2j_1}}{a_{1j_1}}.x_2^* + \frac{1}{a_{1j_1}} \rightarrow \min$$

$$\text{Với các ràng buộc: } \frac{1}{a_{2j_1}} \geq x_2^* \geq 0 \quad (2.16)$$

$$\text{và } \left( \frac{1}{a_{1j_1}} - \frac{1}{a_{1j}} \right) \geq \left( \frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right).x_2^* \quad \text{với } j = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq j_1 \quad (2.17)$$

$$\text{Đặt } d_j^{j_1} = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} - \frac{1}{a_{1j}} \right), \quad c_j^{j_1} = \left( \frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right)$$

$$\text{Gọi } J_{j_1}^0 := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_1 : c_j^{j_1} = 0$$

$$J_{j_1}^+ := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_1 : c_j^{j_1} > 0$$

$$J_{j_1}^- := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_1 : c_j^{j_1} < 0$$

Có các khả năng sau xảy ra:

**III.1.1/** Nếu  $J_{j_1}^0 = \emptyset$  thì chuyển xuống **III.1.1.2/**.

**III.1.2/** Nếu  $J_{j_1}^0 \neq \emptyset$  :

+ Tồn tại  $j \in J_{j_1}^0$  mà  $d_j^{j_1} < 0$  thì suy ra ràng buộc  $j_1$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $\forall j \in J_{j_1}^0$  mà  $d_j^{j_1} \geq 0$  thì chuyển xuống **III.1.2.1/**

**III.1.2.1/**  $\forall j \in J_{j_1}^+$  thì từ (2.17) ta có  $\frac{d_j^{j_1}}{c_j^{j_1}} \geq x_2^*$

**III.1.2.2/** Nếu tồn tại  $j \in J_{j_1}^+$  mà  $d_j^{j_1} < 0$  thì suy ra ràng buộc  $j_1$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

**III.1.2.3/** Nếu  $\forall j \in J_{j_1}^+$  mà  $d_j^{j_1} \geq 0$  thì ta chuyển xuống **III.1.3/**

**III.1.3/**  $\forall j \in J_{j_1}^-$  thì từ (2.17) ta có  $x_2^* \geq \frac{d_j^{j_1}}{c_j^{j_1}}$

Gọi  $M_{j_1} = \max \left\{ \frac{d_j^{j_1}}{c_j^{j_1}} : \forall j \in J_{j_1}^- \right\}$

+ Nếu  $M_{j_1} > \frac{1}{a_{2j_1}}$  thì suy ra ràng buộc  $j_1$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $M_{j_1} \leq \frac{1}{a_{2j_1}}$  thì ta dễ dàng suy ra lời giải của bài toán  $P_I$  sẽ là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} \quad 1 - a_{2j_1} M_{j_1} ; M_{j_1} \right) \quad (2.18)$$

**III.2/** Nếu  $\frac{1}{a_{2j_2}} > \frac{1}{a_{1j_1}}$  thì ta chọn ràng buộc ứng với chỉ số  $j_2$  thỏa mãn (2.8) và thấy

có hai khả năng: hoặc ràng buộc  $j_2$  là ràng buộc biên chứa lời giải của bài toán  $P_I$  hoặc nó là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ . Vậy ta tiến hành tính toán như sau để tìm được

$x^* = x_1^*; x_2^*$  là lời giải của bài toán  $P_I$  thỏa mãn chặt ràng buộc  $j_2$  hoặc biết nó là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$  của bài toán  $P_I$  và loại nó ra khỏi miền ràng buộc  $D_I$ .

Từ  $a_{1j_1}.x_1^* + a_{2j_2}.x_2^* - 1 = 0$  ta thay  $x_1^* = \frac{1}{a_{1j_1}} (1 - a_{2j_2}.x_2^*)$  vào hàm mục tiêu và các ràng buộc của bài toán  $P_I$  và đưa việc giải bài toán  $P_I$  về việc giải bài toán một biến tương đương sau:

$$f_1 x^* = f_1 x_1^* = \frac{a_{1j_1} - a_{2j_2}}{a_{1j_1}}.x_2^* + \frac{1}{a_{1j_1}} \rightarrow \min$$

$$\text{Với các ràng buộc: } \frac{1}{a_{2j_2}} \geq x_2^* \geq 0 \quad (2.19)$$

$$\text{và } \left( \frac{1}{a_{1j_1}} - \frac{1}{a_{1j}} \right) \geq \left( \frac{a_{2j_2}}{a_{1j_1}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right).x_2^* \quad \text{với } j = 1, 2, \dots, n; j \neq j_2 \quad (2.20)$$

Chú ý vì  $j_2 \in J_2$  nên hệ số của hàm mục tiêu một biến trên là âm.

$$\text{Đặt } d_j^{j_2} = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} - \frac{1}{a_{1j}} \right), c_j^{j_2} = \left( \frac{a_{2j_2}}{a_{1j_1}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right)$$

$$\text{Gọi } J_{j_2}^0 := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_2 : c_j^{j_2} = 0$$

$$J_{j_2}^+ := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_2 : c_j^{j_2} > 0$$

$$J_{j_2}^- := j \in 1, 2, \dots, n \setminus j_2 : c_j^{j_2} < 0$$

Có các khả năng sau xảy ra:

**III.2.1/** Nếu  $J_{j_2}^0 = \emptyset$  thì chuyển xuống **III.2.1.1/**

**III.2.2/** Nếu  $J_{j_2}^0 \neq \emptyset$  :

+ Tồn tại  $j \in J_{j_2}^0$  mà  $d_j^{j_2} < 0$  thì suy ra ràng buộc  $j_2$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $\forall j \in J_{j_2}^0$  mà  $d_j^{j_2} \geq 0$  thì chuyển xuống **III.2.3.1/**

**III.2.1.2/**  $\forall j \in J_{j_2}^-$  thì từ (2.20) ta có  $x_2^* \geq \frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}}$

$$\text{Gọi } \text{Max}_{j_2} = \max \left( \frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}} : \forall j \in J_{j_2}^- \right)$$

+ Nếu  $\text{Max}_{j_2} > \frac{1}{a_{2j_2}}$  thì suy ra ràng buộc  $j_2$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ ,

ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $\text{Max}_{j_2} \leq \frac{1}{a_{2j_2}}$  thì ta chuyển đến **III.2.3./**

**III.2.3./**  $\forall j \in J_{j_2}^+$  thì từ (2.20) ta có  $\frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}} \geq x_2^*$

**III.2.3.1/** Nếu tồn tại  $j \in J_{j_2}^+$  mà  $d_j^{j_2} < 0$  thì suy ra ràng buộc  $j_2$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận  $D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

**III.2.3.2./** Nếu  $\forall j \in J_{j_2}^+$  mà  $d_j^{j_2} \geq 0$  thì ta gọi

$$m_{j_2} = \min \left\{ \frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}} : \forall j \in J_{j_2}^+ \right\} \text{ và } M_{j_2} = \min \left\{ m_{j_2}; \frac{1}{a_{2j_2}} \right\}$$

và lời giải của bài toán  $P_I$  là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} \quad 1 - a_{2j_2} \cdot M_{j_2} ; M_{j_2} \right) \quad (2.21)$$

Rõ ràng theo định lý 2.2 nếu miền ràng buộc của bài toán của người chơi  $P_I$  không có ràng buộc lỏng thì phương pháp TT cho lời giải sau một bước và khả năng xấu nhất thì số bước giải không quá số chiến lược  $n$  của người chơi  $P_2$ .

### 2.3. Bảng giải bài toán của người chơi $P_I$ theo phương pháp TT

Để thuận tiện cho việc giải bài toán của người của  $P_I$  ta xây dựng bảng tính toán các số liệu cần thiết từ đó thay vào công thức nghiệm đã được xây dựng trong phương pháp TT ở mục trên.

Bài toán của người chơi  $P_I$  khi giải bằng phương pháp TT trong các trường hợp đơn giản như các trường hợp I và II thì ta có thể nhận ngay được lời giải của bài toán, vậy ta chỉ lập bảng trong trường hợp III như sau:

Bảng tính toán trong trường hợp III.1: khi  $\frac{1}{a_{2j_1}} \leq \frac{1}{a_{1j_1}}$ :

**Bảng 1**

Chỉ số Cơ sở	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$\frac{1}{a_{1j}}$	$\frac{1}{a_{2j}}$	$\frac{a_{2j}}{a_{1j}}$	$d_j^{j_1}$	$c_j^{j_1}$	$\frac{d_j^{j_1}}{c_j^{j_1}}$
1	$a_{11}$	$a_{21}$	$1/a_{11}$	$1/a_{21}$	$a_{21}/a_{11}$	$d_1^{j_1}$	$c_1^{j_1}$	$\frac{d_1^{j_1}}{c_1^{j_1}}$
2	$a_{12}$	$a_{22}$	$1/a_{12}$	$1/a_{22}$	$a_{22}/a_{12}$	$d_2^{j_1}$	$c_2^{j_1}$	$\frac{d_2^{j_1}}{c_2^{j_1}}$
....	...	...	...	...	...	...	...	...
$j_1$	$a_{1j_1}$	$a_{2j_1}$	$1/a_{1j_1}$	$1/a_{2j_1}$	$a_{2j_1}/a_{1j_1}$	...	...	...
....	...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$a_{1n}$	$a_{2n}$	$1/a_{1n}$	$1/a_{2n}$	$a_{2n}/a_{1n}$	$d_n^{j_1}$	$c_n^{j_1}$	$\frac{d_n^{j_1}}{c_n^{j_1}}$

Trong đó  $d_j^{j_1} = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} - \frac{1}{a_{1j}} \right)$ ;  $c_j^{j_1} = \left( \frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right)$ ;  $M_{j_1} = \max \left\{ \frac{d_j^{j_1}}{c_j^{j_1}} : \forall j \in J_{j_1}^- \right\}$

+ Nếu thấy  $M_{j_1} > \frac{1}{a_{2j_1}}$  thì suy ra ràng buộc  $j_1$  là ràng buộc lỏng của miền chấp nhận

$D_I$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_I$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $M_{j_1} \leq \frac{1}{a_{2j_1}}$  thì ta dễ dàng nhận được lời giải của bài toán  $P_I$  theo (2.18) sẽ là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{1j_1}} 1 - a_{2j_1} M_{j_1} ; M_{j_1} \right)$$

Bảng tính toán trong trường hợp III.2: khi  $\frac{1}{a_{2j_2}} > \frac{1}{a_{1j_1}}$ :

**Bảng 2**

Chỉ số Cơ sở	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$\frac{1}{a_{1j}}$	$\frac{1}{a_{2j}}$	$\frac{a_{2j}}{a_{1j}}$	$d_j^{j_2}$	$c_j^{j_2}$	$\frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}}$
1	$a_{11}$	$a_{21}$	$1/a_{11}$	$1/a_{21}$	$a_{21}/a_{11}$	$d_1^{j_2}$	$c_1^{j_2}$	$\frac{d_1^{j_2}}{c_1^{j_2}}$
2	$a_{12}$	$a_{22}$	$1/a_{12}$	$1/a_{22}$	$a_{22}/a_{12}$	$d_2^{j_2}$	$c_2^{j_2}$	$\frac{d_2^{j_2}}{c_2^{j_2}}$
....	...	...	...	...	...	...	...	...
$j_2$	$a_{1j_2}$	$a_{2j_2}$	$1/a_{1j_2}$	$1/a_{2j_2}$	$a_{2j_2}/a_{1j_2}$	...	...	...
....	...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$a_{1n}$	$a_{2n}$	$1/a_{1n}$	$1/a_{2n}$	$a_{2n}/a_{1n}$	$d_n^{j_2}$	$c_n^{j_2}$	$\frac{d_n^{j_2}}{c_n^{j_2}}$

Trong đó  $d_j^{j_2} = \left( \frac{1}{a_{1j_2}} - \frac{1}{a_{1j}} \right)$ ;  $c_j^{j_2} = \left( \frac{a_{2j_2}}{a_{1j_2}} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \right)$ ;  $M_{j_2} = \max \left\{ \frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}} : \forall j \in J_{j_1}^- \right\}$

+ Nếu thấy  $\max_{j_2} > \frac{1}{a_{2j_2}}$  thì suy ra ràng buộc  $j_2$  là ràng buộc lỏng của miền chấp

nhận  $D_1$ , ta loại ràng buộc này ra khỏi miền ràng buộc và quay về giải bài toán  $P_1$  với số ràng buộc chỉ còn là  $n-1$ .

+ Nếu  $\max_{j_2} \leq \frac{1}{a_{2j_2}}$ :  $m_{j_2} = \min \left\{ \frac{d_j^{j_2}}{c_j^{j_2}} : \forall j \in J_{j_2}^+ \right\}$  và  $M_{j_2} = \min \left\{ m_{j_2}; \frac{1}{a_{2j_2}} \right\}$



thì ta dễ dàng nhận được lời giải của bài toán  $P_I$  theo (2.21) sẽ là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{1j_2}} \quad 1 - a_{2j_2} \cdot M_{j_2} ; M_{j_2} \right)$$

## 2.4. Ví dụ minh họa giải bài toán $P_I$ theo phương pháp TT

### Ví dụ 1:

Tìm chiến lược tối ưu của  $P_1$  và  $P_2$  với ma trận trò chơi là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta thấy  $-\min a_{ij} : a_{ij} < 0 = 2$ , vì thế ta chọn  $\alpha = 3$  và thay A bởi ma trận

$$A_\alpha = [a_{ij} + \alpha] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} > 0$$

Mọi phần tử của  $A_\alpha$  đều dương nên  $v_\alpha > 0$ .

Ta có cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu tương ứng cần giải như sau:

Cặp bài toán đối ngẫu của  $P_1$  và  $P_2$ :

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ 5x'_1 + 4x'_2 \geq 1 \\ 4x'_1 + 3x'_2 \geq 1 \\ 3x'_1 + 6x'_2 \geq 1 \\ x'_1 + 5x'_2 \geq 1 \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2 = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 \rightarrow \max \\ 5y'_1 + 4y'_2 + 3y'_3 + y'_4 \leq 1 \\ 4y'_1 + 3y'_2 + 6y'_3 + 5y'_4 \leq 1 \\ y'_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y'_3 \geq 0, y'_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

Chỉ số Cơ sở	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$\frac{1}{a_{1j}}$	$\frac{1}{a_{2j}}$	$\frac{a_{2j}}{a_{1j}}$	$d_j^z$	$c_j^z$	$\frac{d_j^z}{c_j^z}$
1	5	4	1/5	1/4	4/5	1/20	-1/20	-1
<b>2</b>	4	3	<b>1/4</b>	1/3	<b>3/4</b>			
3	3	6	1/3	1/6	6/3	-1/12	-5/4	1/15
4	1	5	1	<u>1/5</u>	5/1	-3/4	-17/4	3/17

Từ số liệu ở cột 2 ta xác định được  $J_I = \{1, 2\}$  và  $J_2 = \{3, 4\}$ , từ số liệu của cột 3, cột 4 cho ta xác định được  $j_1 = 2$  và  $j_2 = 4$  và  $\frac{1}{a_{12}} = \frac{1}{4} > \frac{1}{a_{24}} = \frac{1}{5}$ .

Vậy ràng buộc ứng với chỉ số  $j_1 = 2$  được chọn là ràng buộc biên chứa lời giải nếu có của bài toán. Từ bảng ta có

$$M_2 = \max\{-1, 1/15, 3/7\} = 3/7 < \frac{1}{a_{22}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy theo (2.18) ta có lời giải của bài toán}$$

$P_1$  là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{12}} \quad 1 - a_{22} \cdot M_2 \quad ; M_2 \right) = \left( \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3 \cdot 3}{17} \right); \frac{3}{17} \right) = \left( \frac{2}{17}; \frac{3}{17} \right)$$

Từ định lý về độ lệch bù ta có hệ phương trình xác định lời giải của người chơi  $P_2$

$$\begin{cases} 5y'_1 + 4y'_2 + 3y'_3 + y'_4 = 1 \\ 4y'_1 + 3y'_2 + 6y'_3 + 5y'_4 = 1 \\ y'_1 = 0 \\ y'_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $y'$  (0, 4/17, 0, 1/17)

Từ đó suy ra lời giải của trò chơi đã cho:

$$+ \text{Chiến lược tối ưu của } P_1: x^* = v_\alpha x' = \frac{17}{5} \left( \frac{2}{17}, \frac{3}{17} \right) = \left( \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$+ \text{Chiến lược tối ưu của } P_2: y^* = v_\alpha y' = \frac{17}{5} \left( 0, \frac{4}{17}, 0, \frac{1}{17} \right) = \left( 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$$

$$+ \text{Giá của trò chơi: } v^* = v_\alpha - \alpha = \frac{17}{5} - 3 = \frac{2}{5}$$

## Ví dụ 2:

Tìm chiến lược tối ưu của  $P_1$  và  $P_2$  với ma trận trò chơi là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Ta thấy  $-\min a_{ij} : a_{ij} < 0 = 1$ , vì thế ta chọn  $\alpha = 2$  và thay A bởi ma trận

$$A_{\alpha} = [a_{ij} + \alpha] = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix} > 0$$

Mọi phần tử của  $A_{\alpha}$  đều dương nên  $v_{\alpha} > 0$ .

Ta có cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu tương ứng cần giải như sau:

Cặp bài toán đối ngẫu của  $P_1$  và  $P_2$ :

$$\begin{cases} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min \\ 5x'_1 + 3x'_2 \geq 1 \\ 8x'_1 + 6x'_2 \geq 1 \\ 4x'_1 + 11x'_2 \geq 1 \\ x'_1 + 12x'_2 \geq 1 \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2 = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 \rightarrow \max \\ 5y'_1 + 8y'_2 + 4y'_3 + y'_4 \leq 1 \\ 3y'_1 + 6y'_2 + 11y'_3 + 12y'_4 \leq 1 \\ y'_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y'_3 \geq 0, y'_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

Chỉ số Cơ sở	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$\frac{1}{a_{1j}}$	$\frac{1}{a_{2j}}$	$\frac{a_{2j}}{a_{1j}}$	$d_j^2$	$c_j^2$	$\frac{d_j^2}{c_j^2}$
1	5	3	<u>1/5</u>	1/3	<u>3/5</u>			
2	8	6	1/8	1/6	3/4	3/40	-3/20	-1/2
3	4	11	1/4	<u>1/11</u>	11/4	-1/20	-43/20	1/43
4	1	12	1	<u>1/12</u>	12	-4/5	-57/5	4/57

Từ số liệu ở cột 2 ta xác định được  $J_1 = \{1, 2\}$  và  $J_2 = \{3, 4\}$ , từ số liệu của cột 3, cột 4 cho ta xác định được  $j_1 = 1$  và  $j_2 = 3$  và  $\frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{a_{23}} = \frac{1}{11}$ .

Vậy ràng buộc ứng với chỉ số  $j_1 = 1$  được chọn là ràng buộc biên chứa lời giải nếu có của bài toán. Từ bảng ta có

$$M_1 = \max \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{43}, \frac{4}{57} \right\} = \frac{4}{57} < \frac{1}{a_{21}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy theo (2.18) ta có lời giải của bài toán  $P_1$  là

$$x^* = \left( \frac{1}{a_{11}} \quad 1 - a_{21} \cdot M_1; M_1 \right)$$

$$= \left( \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{3.4}{57} \right); \frac{4}{57} \right) = (9/57; 4/57)$$

Vậy  $v_\alpha = \frac{57}{13}$

Từ định lý về độ lệch bù ta có hệ phương trình xác định lời giải của người chơi  $P_2$

$$\begin{cases} 5y'_1 + 8y'_2 + 4y'_3 + y'_4 = 1 \\ 3y'_1 + 6y'_2 + 11y'_3 + 12y'_4 = 1 \\ y'_2 = 0 \\ y'_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $y' \left( \frac{11}{57}; 0; 0; \frac{2}{57} \right)$ .

Từ đó suy ra lời giải của trò chơi đã cho:

+ Chiến lược tối ưu của  $P_1$ :  $x^* = v_\alpha x' = \frac{57}{13} \left( \frac{9}{57}, \frac{4}{57} \right) = \left( \frac{9}{13}, \frac{4}{13} \right)$

+ Chiến lược tối ưu của  $P_2$ :  $y^* = v_\alpha y' = \frac{57}{13} \left( \frac{11}{57}, 0, 0, \frac{2}{57} \right) = \left( \frac{11}{13}, 0, 0, \frac{2}{13} \right)$

+ Giá của trò chơi:  $v^* = v_\alpha - \alpha = \frac{57}{13} - 2 = \frac{31}{13}$

### Chương 3

## NHẬN XÉT VÀ KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày việc ứng dụng phương pháp nón xoay để tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu trong trò chơi ma trận được đưa về giải cặp bài toán đối ngẫu. Vì vậy chương 1 của luận văn đã trình bày những kiến thức liên quan đến bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn, bài toán đối ngẫu và bài toán trò chơi ma trận.

Trong chương 2, luận văn đã ứng dụng thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm trình bày trong chương 1, xây dựng một phương pháp cụ thể giải trực tiếp bài toán tìm chiến lược tối ưu trong trường hợp đặc biệt với số chiến lược của người chơi thứ nhất là 2 (còn người chơi thứ hai có số chiến lược chơi là  $n$  bất kỳ) mà chúng ta vẫn thường giải nó bằng phương pháp đồ thị.

Chúng ta đã biết, nhiều sách và tài liệu đã đưa ra các khái niệm về chiến lược thừa và những phương pháp loại bớt các chiến lược thừa này của bài toán trò chơi ma trận trước khi đưa nó về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tương ứng để tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu. Và khi bài toán trò chơi ma trận không có chiến lược thừa thì phương pháp TT trình bày trong chương 2 sẽ cho ta lời giải bài toán trò chơi ma trận sau một bước khi người chơi thứ nhất có số chiến lược chơi là 2 và người chơi thứ hai có số chiến lược chơi  $n$  tùy ý. Còn nếu chúng ta sử dụng phương pháp đơn hình để giải thì chắc chắn số bước lặp sẽ nhiều hơn.

Hoàn toàn với những lý luận tương tự như đã trình bày trong phương pháp TT, chúng ta cũng có thể xây dựng được một phương pháp tương tự như phương pháp TT để giải trực tiếp bài toán tìm chiến lược tối ưu trong trường hợp đặc biệt với số chiến lược của người chơi thứ hai là 2 (còn người chơi thứ nhất có số chiến lược chơi là  $m$  bất kỳ) mà chúng ta vẫn thường giải nó bằng phương pháp đồ thị. Tác giả của luận văn hy vọng sẽ có dịp được trình bày nó.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Lê Dũng Mưu, *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Năm 1998.
- [2] Trần Xuân Sinh, *Toán kinh tế*, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2007.
- [3]. Tô Cẩm Tú, *Một số phương pháp tối ưu hóa trong kinh tế*, Năm 1997.
- [4] Trần Vũ Thiệu và Bùi Thế Tâm, *Các phương pháp tối ưu hóa*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Năm 1998.
- [5] Nguyễn Anh Tuấn, *Quy hoạch gần lồi – gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Năm 2011.
- [6]. Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Văn Quý. *Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay*, Nxb Giáo dục Việt nam, Năm 2012.

### Tiếng Anh

- [7] A.C. Belenski, *Minimization monotone function in a polyhedron set*, Automatic and Tele-Mechanics 9, 112-121(1982).

- [8] Nguyen Anh Tuan and Pham Canh Duong, “Vietnam Journal of Mathematics”, *Minimization of An Almost-convex and Almost-concave Function*, Volume 24, Number 1.1996 (57-74).
- [9] H Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer 1998.