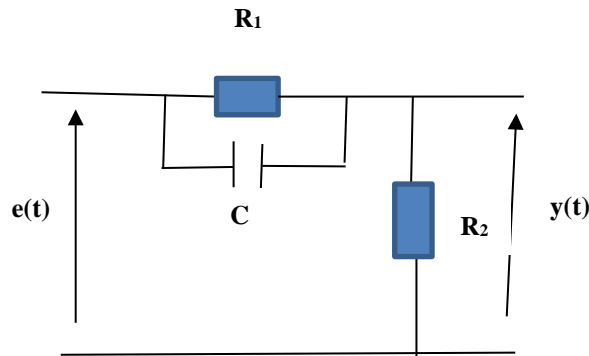


TD N°2

Représentation temporelles des systèmes

Exercice N°1

Soit le circuit suivant



1. Déterminer l'équation différentielle du système.
2. Calculer la fonction de transfert $G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$.

Exercice N°2

Soient les deux systèmes A et B définis par ces équations différentielles:

$$A/ \ddot{y} + y = e(t).$$

$$B/ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 2x.$$

Déterminer la fonction de transfert de ces systèmes.

Exercice N°3

Déterminer les fonctions de transfert à partir des représentations d'état suivantes:

$$1. \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [0 \quad 1] x.$$

$$2. \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e; \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] x$$

Exercice N°4

Soient les fonctions de transfert suivantes:

$$G_1(p) = \frac{20}{p(p+1)(p+4)}$$

$$G_2(p) = \frac{10}{p(p+2)(p-1)^2}$$

Proposer une représentation d'état pour chaque fonction de transfert.

Solution de TD N°2

Exercice N°1

1. L'équation différentielle

$$\text{On pose } Z = \frac{R_1 \times \frac{1}{pC}}{R_1 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1}{1 + R_1 Cp}$$

$$y(t) = R_2 \times i \Rightarrow i = \frac{y}{R_2}$$

$$e(t) = Zi + y(t)$$

$$e(t) = \frac{R_1}{R_2(1 + R_1 Cp)} y + y$$

$$R_1 R_2 C \dot{y} + (R_1 + R_2)y = R_1 R_2 C \dot{e} + R_2 e$$

2. Fonction de transfert

$$Y(p)[R_1 R_2 Cp + (R_1 + R_2)] = E(p)[R_2 + R_1 R_2 Cp]$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{R_2 + R_1 R_2 Cp}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 Cp}$$

Exercice N°2

$$A/ \ddot{y} + y = e(t).$$

La fonction de transfert de ce système :

$$Y(p)(p^2 + 1) = E(p)$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$B/ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 2x.$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 4) = (3p + 2)X(p)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{3p + 2}{(p + 2)^2}$$

Exercice N°3

$$\bullet \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [0 \quad 1] x.$$

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p - 1 & -1 \\ 0 & p + 1 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 - 1} \begin{pmatrix} p + 1 & 1 \\ 0 & p - 1 \end{pmatrix}$$

$$G(p) = \frac{1}{p + 1}$$

$$\bullet \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e; \quad y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 1 & 2 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)} = \frac{\begin{vmatrix} (p^2 + 3p + 2) & p + 3 & 1 \\ -1 & p(p + 3) & p \\ -p & -(2p + 1) & p^2 \end{vmatrix}}{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

Finalement on trouve la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{10(p^2 + 3p + 2)}{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

Exercice N°4

$$G_1(p) = \frac{20}{p(p+1)(p+4)}$$

$$G_1(p) = \frac{5}{p} - \frac{20}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{5}{3} \frac{1}{p+4}$$

On choisit les variables d'états:

$$\begin{cases} X_1(p) = \frac{1}{p} \times E(p) \\ X_2(p) = \frac{1}{p+1} \times E(p) \\ X_3(p) = \frac{1}{p+4} \times E(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ \dot{x}_2 = -x_2 + e \\ \dot{x}_3 = e - 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e$$

$$y = \left(5 \quad -\frac{20}{3} \quad \frac{5}{3} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$G_2(p) = \frac{10}{p(p+2)(p-1)^2}$$

On choisit les variables d'états:

$$\begin{cases} X_1(p) = \frac{1}{p} \times E(p) \\ X_2(p) = \frac{1}{p(p+2)} \times E(p) \\ X_3(p) = \frac{1}{p(p+2)(p-1)} \times E(p) \\ X_4(p) = \frac{1}{p(p+2)(p-1)(p-1)} \times E(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$