

ш 15196/3 30
Экз. № 476

**МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
РАДИОЛОКАЦИОННЫХ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
РЕАКТИВНЫМИ
САМОЛЕТАМИ-СНАРЯДАМИ**

ТОМ I

КНИГА ПЕРВАЯ

**ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СОЮЗА ССР
Москва — 1958**

$$\begin{array}{r} 1 \\ 42 \overline{) 164} \\ \underline{84} \\ 80 \end{array}$$

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе приведены материалы по формированию, выбору параметров и расчету радиолокационных систем управления реактивными снарядами, предназначенными для поражения морских и наземных целей.

В работе делается первая попытка дать систематическое изложение вопросов, связанных с проектированием и анализом радиолокационных систем управления, предназначенных для поражения морских и наземных целей. Поэтому в работе неизбежны некоторые неточности и упущения. Все замечания и предложения по устранению этих недостатков будут приняты с благодарностью.

В книге пронумеровано всего 228 страниц. Кроме того, в книге имеется 5 вклеек на 5 листах.

Вклейка № 1, рис. 2.6, между стр. 56 и 57.

Вклейка № 2, рис. 2.31, между стр. 106 и 107.

Вклейка № 3, рис. 2.32, между стр. 106 и 107.

Вклейка № 4, рис. 2.35, между стр. 112 и 113.

Вклейка № 5, рис. 2.59, между стр. 206 и 207.

ГЛАВА 1

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ТИПЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РЕАКТИВНЫМИ СНАРЯДАМИ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫМИ ДЛЯ ПОРАЖЕНИЯ МОРСКИХ И НАЗЕМНЫХ ЦЕЛЕЙ

1.1. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Совокупность устройств, средств и приборов, обеспечивающих возможность управления на расстоянии режимом, состоянием и исполнительными органами объектов (машин, механизмов и установок), образует телемеханическую систему.

Телемеханическим системам, особенно применительно к использованию их для управления объектами вооружения, уже давно придавалось особое значение. Сразу же после изобретения в 1895 г. радио А. С. Поповым появились работы по созданию средств управления объектами вооружения путем передачи электрических сигналов на расстояние без проводов.

Однако широкое развитие и практическое применение телемеханические средства вооружения получили лишь за несколько последних десятилетий. Объясняется это тем, что только научные достижения, которыми ознаменовались конец XIX и начало XX веков, и, в частности, успехи в области электрофизики, автоматики, теории и техники реактивного движения, аэродинамики, радиофизики и электроники создали широкую базу для создания этих средств.

Из всех видов телемеханических средств вооружения приобрели наибольшее значение и получили наиболее широкое применение управляемые реактивные снаряды. В настоящее время интенсивно проводятся работы по исследованию, разработке и испытанию разных типов реактивных снарядов и аппаратуры управления ими.

Классификация реактивных снарядов может быть произведена различным образом. В основу ее могут быть положены отдельные тактико-технические параметры (дальность полета, скорость и т. д.), конструктивные отличия, аэродинамические свойства и т. д. Однако при общей тактико-технической оценке качества систем управляемого реактивного вооружения и требований к ним зачастую весьма существенными факторами являются характеристики цели, для поражения которой предназначен реактивный снаряд, и характеристики пуска или старта снаряда, в значительной мере определяющие назначение системы.

Поэтому указанные характеристики часто кладутся в основу классификации систем управляемого реактивного вооружения. Так как снаряды, стартующие с наземного стартового устройства, могут быть предназначены для поражения наземных, морских и воздушных целей, то системы управления подобными снарядами соответственно называются системами «земля — земля», «земля — море» и «земля — воздух». Соответственно при старте снаряда с самолета системы управления делятся на системы «воздух — земля», «воздух — море» и «воздух — воздух», а при старте снарядов с корабля любого класса — на системы «море — земля», «море — море» и «море — воздух». Каждый из указанных классов систем управления должен удовлетворять специфическим требованиям, связанным с особенностью пуска или старта снаряда, характеристикой цели и с обеспечением необходимой точности попадания снаряда в цель.

В пределах каждого из классов телемеханических систем возникает необходимость проектирования специализированных систем, удовлетворяющих тактико-техническим требованиям поражения определенных типов целей, как-то: самолетов, реактивных снарядов, кораблей определенного класса, мостов и т. д., или поражения целей, например самолетов, движущихся в ограниченном диапазоне высот, скоростей и т. д. При проектировании специализированных систем управляемого реактивного вооружения наиболее рационально могут быть разрешены вопросы обеспечения удобств их эксплуатации и обеспечения высокой эффективности поражения целей. Однако для более оперативного боевого использования управляемых снарядов представляется возможным и целесообразным в ряде случаев предусмотреть возможность использования снарядов одного и того же класса для поражения целей различных типов, например морских и наземных.

Основными задачами систем управляемого реактивного вооружения являются: обеспечение необходимых условий пуска или старта снаряда, управление движением снаряда, обеспечение сближения его с целью соответственно принятому методу наведения снаряда на цель и обеспечение поражения цели.

Для управления движением снаряда и режимом работы установленных на нем устройств могут быть применены следующие принципы управления: телеуправление, теленаведение, или телеориентирование, самонаведение, автономное управление и комбинированное управление.

При телеуправлении, или командном управлении, выбор, образование и изменение состояния цепей управления исполнительными органами снаряда происходит под воздействием сигналов, образуемых на пункте управления и передаваемых на снаряд по радиолинии связи. Включение, выключение или изменение состояния цепей управления, происходящие под воздействием этих сигналов, в свою очередь вызывают требуемое изменение режима полета снаряда или режима работы установленных на нем устройств. Характерным для телеуправления является то, что сигналы, под воздействием которых происходит изменение режима полета снаряда или режима работы

установленных на нем устройств, образуются вне снаряда на пункте управления и передаются на снаряд по радиолинии связи.

Совокупность приборов и средств, осуществляющих выработку, передачу и раздельный прием на расстоянии сигналов управления обусловленной структуры, служащих для независимого включения, выключения и изменения режима и состояния соответствующих исполнительных органов, образует устройство телеуправления.

При телеуправлении снарядами телемеханическая система представляет собой комплекс, состоящий из устройства телеуправления, устройства автоматизации и устройства телеконтроля.

Устройство телеуправления вырабатывает и передает с пункта управления на снаряд сигналы, под воздействием которых на снаряде происходит открытие, прекращение или изменение того или иного процесса. Через устройство телеуправления на снаряд могут передаваться команды управления его движением по курсу и высоте. Они формируются в аппаратуре пункта управления по данным о координатах цели и снаряда. Эти координаты и соответствующие им команды управления являются плавными, сравнительно медленно меняющимися функциями времени. Кроме указанных команд управления движением снаряда, через устройство телеуправления могут передаваться дискретные во времени команды, например команды перевода снаряда в пикирование в заданной области пространства в районе цели, команды дальнего взведения дистанционного взрывателя снаряда, команды корректировки устройств и механизмов, обеспечивающих работу отдельных агрегатов и органов снаряда по заданной программе, команды изменения режима работы аппаратуры на борту снаряда и т. д. Следует отметить, что возможны случаи, когда управление движением снаряда производится также с помощью дискретных во времени команд.

Устройство автоматизации под воздействием сигналов, выработанных устройством телеуправления, непосредственно обеспечивает автоматическое связывание отдельных процессов на снаряде и выполнение последним без участия человека ряда операций в требуемой зависимости и последовательности. Одним из наиболее характерных аппаратов, используемых в устройстве автоматизации снаряда, является автопилот, предназначенный для стабилизации снаряда относительно центра тяжести и управления его полетом путем непосредственного воздействия на исполнительные органы снаряда — рули и элероны.

Устройство телеконтроля вырабатывает и передает на пункт управления информацию о цели и информацию о режиме, положении или состоянии снаряда или установленных на нем устройств.

При телемеханическом управлении реактивными снарядами устройство телеконтроля должно давать возможность судить о положении их в пространстве, об их перемещениях, положении цели, взаимном положении цели и снаряда и т. д. Для решения указанных задач в качестве составной части устройств телеконтроля могут быть использованы индикаторные или следящие устройства радиолокационных, радионавигационных, телевизионных и других систем,

с помощью которых может быть обеспечено наблюдение за положением снарядов и целей в пространстве, слежение за ними и автоматическое измерение их абсолютных или относительных координат.

Передачик и приемник устройства телеконтроля, с помощью которого вырабатываются и фиксируются данные о цели и снаряде (в виде изображения на экранах радиолокационного или телевизионного индикаторного устройства, в виде сигналов, характеризующих координаты цели и снаряда, и т. д.), могут располагаться непосредственно на пункте управления или на пункте, не совпадающем пространственно с ним. В последнем случае данные с этого пункта по ретрансляционной линии связи должны передаваться на пункт управления. На основе данных о координатах цели и снаряда или об их взаимном положении на пункте управления должны выра-

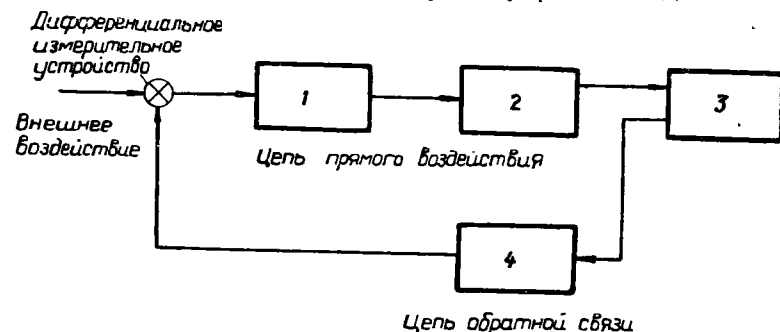


Рис. 1.1. Телемеханическая система управления снарядом:

1 — устройство телеуправления; 2 — устройство автоматизации снаряда; 3 — снаряд;
4 — устройство телеконтроля

батываться команды, определяемые отклонением снаряда от положения, которое он в процессе сближения с целью должен занимать согласно принятому методу наведения его на цель. Сигналы, характеризующие эти команды, с помощью устройства телеуправления передаются приемному устройству, установленному на снаряде. Сигналы эти могут вырабатываться вручную оператором или автоматически с помощью специального устройства выработки команд управления, так чтобы под воздействием этих команд отклонение снаряда от предписываемой ему методом наведения траектории уменьшалось и стремилось к нулю. В последнем случае телемеханическая система в целом представляет собой замкнутую систему, которую можно представить в виде петли или контура с устройствами телеуправления и автоматизации, находящимися в цепи прямого воздействия, и устройством телеконтроля, находящимся в цепи обратной связи (рис. 1.1).

С помощью устройства телеуправления происходит передача команд с пункта управления на снаряд. С помощью устройства телеконтроля происходит передача со снаряда на пункт управления фактических значений измеряемых параметров снаряда, например его координат. В дифференциальном измерительном устройстве происходит сравнение требуемых для обеспечения выбранного метода

наведения значений измеряемых параметров, определяющих положение снаряда, с их фактическим значением и образуется управляющий сигнал, характеризующий разность значений этих параметров. На вход его поступают сигналы с выхода устройства телеконтроля снаряда и внешние для петли воздействия. Сигналы с выхода устройства телеконтроля являются мерой фактических значений измеряемых параметров. Внешние для петли воздействия являются мерой требуемых значений этих параметров. В общем случае внешние для петли воздействия могут быть образованы в результате изменения какой-либо физической величины (температуры, давления, скорости перемещения, напряжения электрического тока и т. д.). Физическими величинами, которые должны быть использованы при выработке команд управления движением снаряда, являются координаты цели, а также координаты снаряда, которые в некоторых случаях используются для образования требуемой выбранным методом наведения траектории движения снаряда. Внешние для петли воздействия образуются в виде сигналов, зависящих от требуемого сочетания указанных координат и их функций.

Сигналы, характеризующие координаты цели, могут вырабатываться либо автоматически системой слежения за целью, либо вручную оператором по изображениям на экранах индикаторных устройств радиолокационных, радионавигационных или телевизионных систем. Управляющий сигнал, возникающий на выходе дифференциального измерительного устройства, передается устройством телеуправления и через устройство автоматизации вызывает уменьшение имеющегося несоответствия между требуемым и фактическим значениями измеряемых параметров, например параметров движения снаряда. При равенстве фактических значений измеряемых параметров их требуемым значениям снаряд должен был бы сближаться с целью точно по траектории, определяемой выбранным методом наведения, характером движения пункта управления и цели и называемой кинематической траекторией. Отклонение действительной траектории снаряда от кинематической траектории характеризует ошибки наведения снаряда на цель.

В отличие от телеуправления, когда сигналы управления образуются вне снаряда и передаются на него по радиолинии связи, при теленаведении, или телеориентировании, так же как при самонаведении и при автономном управлении, сигналы управления движением снаряда образуются непосредственно на снаряде. При теленаведении сигналы управления вырабатываются непосредственно на снаряде по данным измерения его отклонений (угловых или линейных) от ориентированных в пространстве точек, линий и поверхностей. Непременной составной частью систем теленаведения являются устройства пространственного ориентирования, т. е. определенным образом ориентированные в пространстве излучающие устройства с присущим им распределением в пространстве излучаемой энергии. В качестве таких средств пространственного ориентирования могут служить радиолокационные, радионавигационные системы и т. д. При использовании в качестве средств пространственного ориентирования радио-

локационных станций со сканирующим лучом за ориентированную в пространстве линию или поверхность может быть принята равносигнальная линия (равносигнальное направление) или равносигнальная плоскость луча электромагнитной энергии, излучаемой антенной передающего устройства радиолокационной станции. Сигнал, образующийся на выходе приемного устройства снаряда, находящегося в зоне облучения энергией, может явиться мерой угла отклонения линии визирования снаряда от равносигнального направления или равносигнальной плоскости. Линией визирования снаряда называется прямая, соединяющая радиолокационную станцию со снарядом.

В результате измерения отклонения положения снаряда от ориентированных в пространстве точек, линий и поверхностей на снаряде вырабатываются сигналы, заставляющие его перемещаться по предписанной траектории.

Необходимо различать два возможных режима работы систем телеориентирования. В первом режиме характер распределения в пространстве энергии излучающих устройств в процессе управления снарядом не меняется или меняется по установленной до начала управления программе. Подобный режим работы систем телеориентирования может быть использован для управления полетом снаряда на участках его траектории, где учет характера движения цели и маневра ее не является существенным, а также при управлении снарядами, предназначенными для поражения неподвижных целей.

Во втором режиме характер распределения в пространстве энергии, излучаемой устройствами ориентирования, должен изменяться соответственно перемещению цели. При этом в результате слежения устройств телеориентирования за целью может быть обеспечено наведение снаряда на цель. Простейшим примером подобного теленаведения является наведение по методу накрытия цели, или методу совмещения трех точек, при котором равносигнальная линия луча энергии, излучаемой передающим устройством радиолокационной станции слежения за целью, одновременно служит ориентирующим направлением для снаряда. При управлении по методу накрытия цели радиолокационная станция, снаряд и цель образуют три точки на линии визирования цели, т. е. на прямой, соединяющей радиолокационную станцию с целью. С перемещением линии визирования цели будет перемещаться равносигнальная линия луча.

Теленаведение снаряда по равносигнальной линии луча станции слежения за целью часто называют наведением по равносигнальной линии. Для наведения по равносигнальной линии снаряд после старта должен быть предварительно введен в зону облучения станции слежения за целью — в луч станции слежения за целью. В процессе наведения снаряда расположенная на нем аппаратура измеряет отклонение снаряда от равносигнальной линии и вырабатывает сигналы управления движением снаряда, заставляющие его перемещаться вдоль равносигнальной линии. Для определения направления отклонения снаряда от равносигнальной линии на снаряд со станции слежения за целью передаются синхронизирующие (опорные) сиг-

налы, положение во времени или фаза которых характеризуют текущие или дискретные, заранее обусловленные положения луча антенны станции.

В наиболее общем случае положение ориентированных в пространстве точек, линий и поверхностей формируется в соответствии с выбранным методом наведения снаряда и данными о координатах цели, полученными на выходе системы слежения за целью.

Самонаведение снаряда на цель есть такой метод управления, при котором сигналы управления снарядом вырабатываются на нем в результате непосредственного использования энергии, излученной или отраженной от цели. Следовательно, при самонаведении на цель сигналы управления могут возникнуть вследствие того, что цель является источником собственного (первичного) излучения или, выделяясь контрастно на окружающем ее фоне, является источником отраженного (вторичного) излучения.

Таким образом, при управлении снарядом по принципу самонаведения на борту его должна располагаться система измерения координат снаряда относительно цели, которая под воздействием отраженной или излученной целью энергии вырабатывает сигналы управления, соответствующие отклонению снаряда от предписанной ему методом наведения траектории. Эти сигналы воздействуют на органы управления снарядом так, чтобы устремить эти отклонения к нулю и вывести снаряд в район цели. Непременной составной частью системы измерения координат снаряда относительно цели должно быть устройство, служащее для определения знака и величины отклонения измеряемых параметров движения снаряда от требуемого методом наведения значения их. В случае использования радиолокационных методов самонаведения мерой этого отклонения может быть угол между направлением равносигнальной линии приемной антенны системы измерения координат цели на борту снаряда и направлением снаряд — цель.

Различают пассивное, активное и полуактивное самонаведение.

При пассивном самонаведении для образования сигналов управления непосредственно используется рассеиваемая целью энергия естественных облучателей (солнца, звезд и т. д.) или энергия находящихся на ней источников излучения, например радиолокаторов, радиостанций и т. д. При активном самонаведении цель облучается первичным источником энергии, установленным на снаряде, а для самонаведения используется отраженная целью энергия. При полуактивном самонаведении цель облучается первичным источником энергии, расположенным вне цели и вне снаряда. Отраженные от цели сигналы воспринимаются на борту снаряда и используются системой измерения координат цели для выработки сигналов, обеспечивающих сближение снаряда с целью по траектории, определяемой выбранным методом наведения.

Метод автономного управления есть такой метод, когда сигналы управления вырабатываются непосредственно на снаряде без использования энергии специальных источников, расположенных на других объектах, а также энергии первичного и вторичного излу-

ния цели. Автономное управление может быть использовано для регулирования или изменения режимов или параметров по заданной заранее программе, например для поворота снаряда с заданной угловой скоростью на начальном участке траектории его полета после старта с целью приближения снаряда к траектории, определяемой выбранным методом наведения. Автономное управление может быть также использовано для поддержания постоянства — стабилизации — заданного режима с целью ослабления влияния внешних возмущений, стремящихся отклонить или вывести снаряд из этого режима, например для обеспечения полета снаряда на заданной высоте.

Автономное управление может происходить как по разомкнутому, так и по замкнутому циклу. В первом случае используются разомкнутые системы автоматического управления, которые под воздействием поступающих на их вход постоянных или изменяющихся во времени по заданной программе сигналов обеспечивают поддержание постоянства или требуемое изменение режима. Во втором случае, например при стабилизации высоты полета снаряда с помощью высотомера, используются замкнутые системы автоматического управления, т. е. системы, в которых для управления режимом или параметрами используются отклонения этого режима или этих параметров от заданного или задаваемого в процессе управления значения их.

Так как при автономном управлении на снаряде в процессе сближения с целью не имеется данных о цели, то возможности применения этого метода для управления полетом снаряда на всем этапе сближения его с целью весьма ограничены. Поэтому автономное управление находит применение для решения возникающих в процессе управления частных задач по управлению полетом снаряда на некоторых участках траектории, а также по наведению снарядов на неподвижные цели, координаты которых заранее известны.

Методы телеуправления, теленаведения, или телеориентирования, самонаведения и автономного управления могут быть применены как раздельно, так и совместно. При раздельном применении их весь процесс управления происходит с использованием одного из рассмотренных методов управления. В случае применения в процессе управления нескольких методов имеет место комбинированное управление. При комбинированном управлении различные методы управления могут быть использованы одновременно, т. е. параллельно во времени или последовательно во времени.

Примером комбинированного использования нескольких методов управления последовательно во времени является случай такого управления снарядами, стартующими с наземного пункта, когда на первом этапе полета имеет место автономное управление, на втором этапе — телеуправление, а на третьем этапе — самонаведение. При этом на первом этапе полета снаряд после старта поворачивается по программе с заданной угловой скоростью относительно горизонтальной оси на определенный угол. На втором этапе по данным системы слежения за целью о координатах цели и по данным системы телеконтроля о координатах снаряда на пункте управления выраба-

тываются команды управления, которые устройством телеуправления передаются на снаряд. Затем на третьем этапе при сближении снаряда с целью на требуемую дальность начинается процесс полуактивного самонаведения с использованием отраженной целью энергии радиолокационной станции, расположенной на пункте управления.

При параллельном во времени комбинированном управлении одновременно для управления различными конкретными функциями снаряда могут быть использованы различные методы. Можно, например, осуществить сближение снаряда с целью при телеуправлении движением его по курсу и автономном управлении движением его по высоте по сигналам с выхода высотомера, находящегося на борту снаряда и обеспечивающего полет его на заданной высоте. Наконец, может иметь место комбинированное использование нескольких методов управления одними и теми же функциями снаряда. Например, возможен случай автономного управления движением снаряда по заданной программе, корректируемой непрерывно или прерывисто сигналами телеуправления, вырабатываемыми по данным измерения системой телеконтроля положения снаряда.

В настоящей работе рассматриваются радиолокационные системы управления реактивными самолетами-снарядами, предназначенными для поражения морских и наземных целей. Под морскими целями понимаются военные корабли и транспорты, под наземными целями — наземные сооружения, промышленные и административные центры и военные базы значительной протяженности.

Следует отметить, что в работе рассмотрен ограниченный класс систем, предназначенных для поражения морских и наземных целей. В частности, не рассмотрены автономные системы наведения самолетов-снарядов на цель, системы, использующие баллистические ракеты, и системы, в которых пункт управления перемещается относительно стартового устройства.

Рассматриваемые системы управления по своему составу и назначению можно разделить на шесть основных типов: «воздух — море», «земля — море», «море — море» и «воздух — земля», «земля — земля», «море — земля».

1.2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СИСТЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ

Требования, предъявляемые к системам управления, можно разделить: на требования, вытекающие из общих тактико-технических данных системы; на эксплуатационные требования; на требования, предъявляемые к конструкции отдельных составных частей и элементов системы управления.

К общим тактико-техническим данным системы управления относятся следующие данные.

1) Назначение и состав системы. Назначение и состав системы определяются характеристикой целей, для поражения которых предназначена система, требуемой дальностью и точностью

наведения самолета-снаряда на цель и характером используемых боевых средств.

2) Принципы построения системы. Принципы построения системы определяются выбранными методами управления самолетом-снарядом (автономное управление, теленаведение, самонаведение) и используемыми средствами управления (радиолокационные средства, астронавигационные средства и т. д.).

3) Дальность действия системы. Дальность действия системы характеризуется: радиусом действия самолета-носителя или корабля, используемых в качестве пункта управления; дальностью действия систем поиска и обнаружения цели; дальностью, начиная с которой координаты цели измеряются с необходимой для наведения самолета-снаряда точностью; дальностью полета самолета-снаряда; дальностью и точностью телеуправления самолетом-снарядом и измерения его координат; дальностью и точностью теленаведения и самонаведения самолета-снаряда на цель; дальностью прямой радиолокационной видимости самолета-снаряда и цели с самолета-носителя, корабля или наземного пункта управления; точностью выхода самолета-носителя или корабля, используемых в качестве пункта управления, в заданную область пространства; точностью выдерживания заданного направления полета самолета-снаряда при автономном управлении им; требуемой точностью наведения самолета-снаряда на цель и др.

4) Условия боевого применения системы. К условиям боевого применения системы относятся: метеорологические условия; состояние моря; время суток; возможные географические районы использования системы; характер движения цели; характер возможного активного противодействия противника работе системы и др.

5) Вероятность попадания самолета-снаряда в цель или в заданную область в районе цели. В зависимости от типа установленного на самолетах-снарядах боевого заряда система управления должна обеспечивать с заданной вероятностью либо прямое попадание самолета-снаряда в цель, либо подрыв его боевого заряда в заданной области вблизи цели или группы целей.

6) Уязвимость системы. Уязвимость системы определяется: высотой и скоростью полета самолета-носителя; дальностью подхода самолета-носителя или корабля, используемых в качестве пункта управления, к цели; временем операции; скрытностью работы системы; помехозащищенностью системы и т. д.

Исходя из этих общих данных, обычно задают требования к параметрам системы, к таким, как: вес самолета-снаряда, максимальная или средняя скорость полета самолета-снаряда, точность определения географических координат самолета-носителя или корабля, характер траектории самолета-снаряда, — а также эксплуатационные требования и требования, предъявляемые к конструкции отдельных составных частей и элементов системы управления.

К системе управления и ее элементам предъявляются следующие основные эксплуатационные требования:

1) требования безотказной работы системы и ее элементов в заданном диапазоне температур, давлений и влажности воздуха, а также при атмосферных осадках, в условиях обледенения и заливания;

2) требования безотказной работы системы и ее элементов при наличии заданных статических и вибрационных перегрузок, после транспортной тряски, длительного нахождения на плавающем корабле или подводной лодке и т. п.;

3) требования по обеспечению гарантийного срока службы, заданного времени непрерывной работы аппаратуры и заданного времени хранения элементов системы;

4) требования к характеру обслуживания системы и к времени приведения ее в боевую готовность.

К конструкции отдельных составных частей и элементов системы управления предъявляются следующие основные требования:

1) простота конструкции и возможность серийного и массового выпуска;

2) надежность работы отдельных элементов системы;

3) удобный доступ к элементам конструкции и взаимозаменяемость отдельных элементов системы;

4) минимальные веса и габариты, в особенности бортовой аппаратуры носителя и снаряда;

5) минимальное потребление электроэнергии или других видов энергии.

Требования к конструкции отдельных составных частей и элементов системы формулируются обычно в частных тактико-технических заданиях на разработку этих составных частей и элементов.

1.3. СИСТЕМЫ «ВОЗДУХ — МОРЕ»

1. Методы управления и типовые траектории

Системы «воздух — море» предназначены для поражения военных кораблей и транспортов противника, находящихся в открытом море или на своих базах.

Система «воздух — море» состоит из самолета-носителя, самолетов-снарядов¹ и аппаратуры управления, размещенной как на самолете-носителе, так и на самолетах-снарядах.

Размещенная на носителе аппаратура предназначена для поиска и обнаружения цели, измерения координат цели относительно носителя, телеуправления или теленаведения снаряда на цель и в некоторых случаях также для облучения цели, телеконтроля и слежения за снарядом.

Размещенная на снаряде аппаратура предназначена для приема передаваемых с носителя команд управления или выработки их

¹ В дальнейшем самолеты-снаряды и самолеты-носители часто будут называться снарядами и носителями.

непосредственно на борту снаряда, стабилизации снаряда относительно его центра тяжести и управления его полетом и в некоторых случаях для измерения координат снаряда относительно цели, выработки команды подрыва боевого заряда, а также для выработки с помощью установленного на борту снаряда приемопередатчика сигналов в системе телеконтроля и слежения за снарядом.

Работа системы управления может быть разбита на следующие основные этапы:

а) поиск и обнаружение цели, переход на автоматическое или ручное слежение за целью, выход носителя на боевой курс, проверка аппаратуры и подготовка снаряда к пуску (отцепке от носителя);

б) пуск снаряда, автономный полет снаряда по заданной программе, ввод снаряда в луч радиолокационной станции слежения за целью или захват сигналов приемопередатчика снаряда радиолокационной станцией слежения за снарядом;

в) наведение снаряда на цель;

г) самонаведение снаряда на цель.

Наведение снаряда на цель может производиться в результате использования средств телеориентирования, средств телеуправления, а также средств автономного управления.

Телеориентирование снаряда осуществляется по равноточной линии луча станции слежения за целью. При относительной простоте таких систем наведения они обладают существенными недостатками:

1) затруднен ввод снаряда в луч после старта снаряда; в связи с этим в ряде случаев возникает необходимость в использовании дополнительной системы ввода снаряда в луч станции слежения за целью, например дополнительной радиолокационной станции с антенной, создающей луч с широким углом раствора;

2) так как выход снаряда из луча станции слежения за целью в процессе наведения недопустим, то при малом угле раствора луча приходится ограничиваться наведением снаряда по методу накрытия цели.

При телеуправлении на носителе измеряются координаты снаряда и цели относительно носителя и вырабатываются команды, пропорциональные отклонению снаряда от кинематической траектории, — траектории, определяемой принятым методом наведения и характером движения носителя и цели; эти команды передаются на снаряд и заставляют его совершать полет вдоль кинематической траектории.

Для повышения скрытности работы системы радиотелеуправления и ее помехозащищенности может применяться дискретное управление снарядом; в этом случае команды передаются в течение коротких промежутков времени, в интервалах между которыми имеет место автономный полет снаряда.

Наведение снаряда на отдельных этапах его полета может осуществляться как в двух плоскостях, так и в одной горизонтальной плоскости (при управлении снарядом по курсу). В последнем случае траектория снаряда в вертикальной плоскости может задаваться автономно по заранее выбранной программе или с помощью средств, установленных на снаряде; например с помощью высотомера.

Использование средств автономного управления на этапе наведения оказывается весьма целесообразным с точки зрения повышения скрытности работы и помехозащищенности системы управления. Поэтому если подрыв боевого заряда снаряда должен быть произведен в заданной области вблизи цели, то на конечном этапе наведения снаряда на цель может быть предусмотрен участок автономного управления по заданной программе.

Средства самонаведения преимущественно используются при управлении снарядами, предназначенными для поражения морских целей, когда должно быть обеспечено прямое попадание снаряда в цель. При использовании методов активного самонаведения на конечном участке этапа наведения (предшествующего этапу самонаведения снаряда) может быть предусмотрен участок автономного управления снарядом по заданной программе.

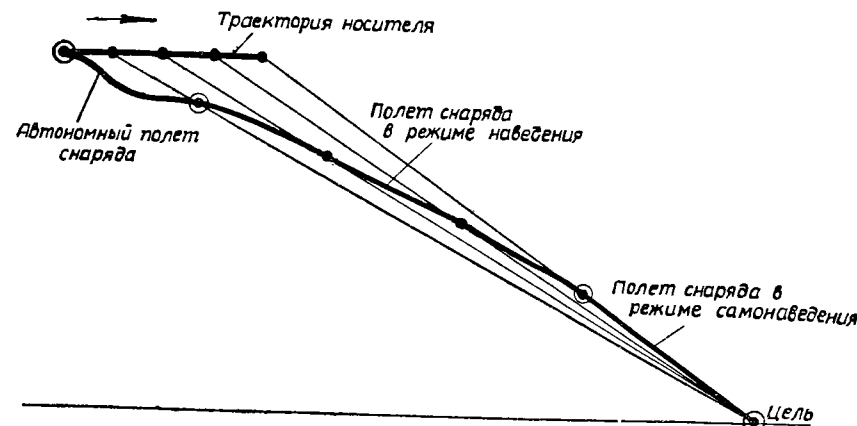


Рис. 1.2. Траектории носителя и снаряда в вертикальной плоскости для систем «воздух—море». Теленаведение по методу накрытия цели с последующим этапом самонаведения снаряда на цель

На рис. 1.2, 1.3 и 1.4 приведены некоторые характерные траектории снаряда и носителя в вертикальной плоскости.

а) Траектории с теленаведением снаряда по методу накрытия цели и с последующим этапом самонаведения снаряда на неподвижную цель (рис. 1.2).

Носитель летит в направлении на цель. Снаряд после старта совершает автономный полет по заданной программе и вводится в радиолуч станции слежения за целью. После ввода в луч начинается этап теленаведения снаряда по методу накрытия цели, при котором снаряд совершает полет к цели, находясь в каждый момент времени на линии носитель — цель. На некотором расстоянии от цели происходит переход от этапа наведения к этапу самонаведения снаряда на цель.

б) Траектории с автономным полетом снаряда на большой высоте и с последующим пикированием на цель (рис. 1.3). Управление

полетом снаряда в вертикальной плоскости на большой высоте производится автономно; с носителя, когда снаряд окажется в районе цели, передается команда перевода снаряда в пикирование на цель. Такого рода траектории выбираются лишь в случаях, не требующих прямого попадания снаряда в цель и, следовательно, не требующих этапа самонаведения.

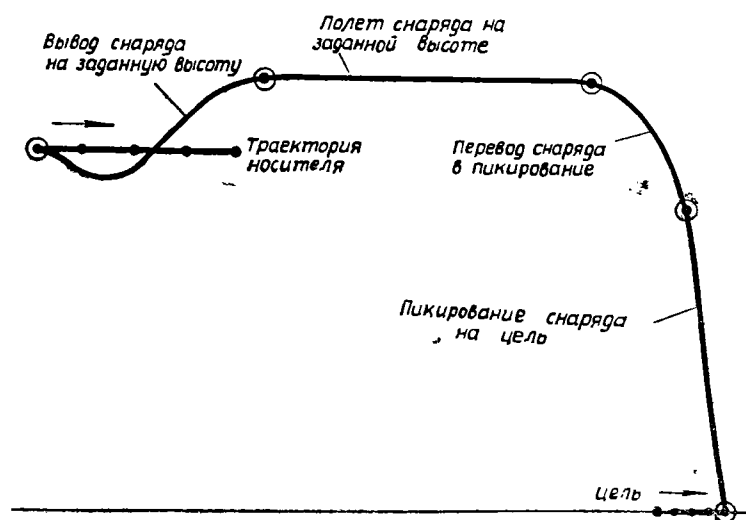


Рис. 1.3. Траектории носителя и снаряда в вертикальной плоскости для систем «воздух—море». Полет снаряда на большой высоте с последующим пикированием на цель

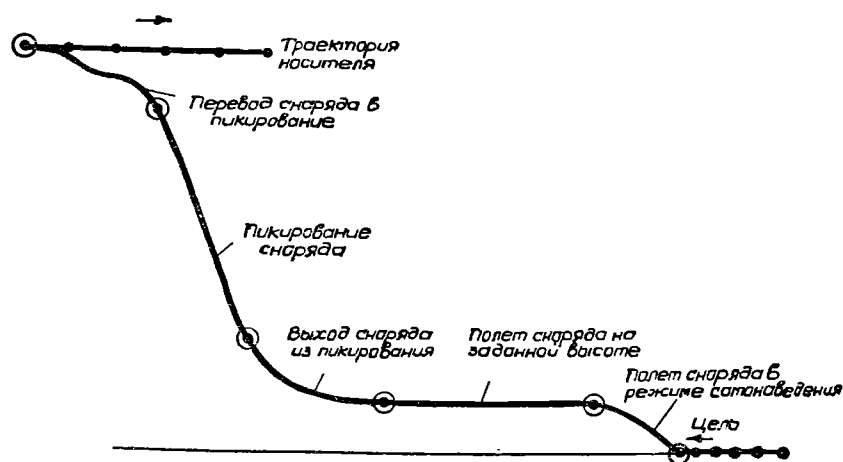


Рис. 1.4. Траектории носителя и снаряда в вертикальной плоскости для систем «воздух—море». Полет снаряда на малой высоте с последующим этапом самонаведения снаряда на цель

в) Траектории с автономным полетом снаряда на малой высоте и с последующим этапом самонаведения (рис. 1.4).

Управление снарядом в вертикальной плоскости до перехода на этап самонаведения производится автономно. После старта снаряд снижается и с помощью средств автономного управления совершает полет на заданной малой высоте. На некотором расстоянии от цели

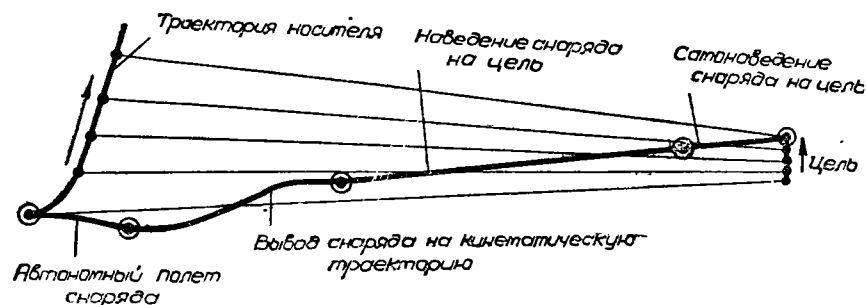


Рис. 1.5. Траектории носителя и снаряда в горизонтальной плоскости для систем «воздух—море». Теленаведение по методу накрытия цели с последующим этапом самонаведения снаряда на цель

происходит переход от этапа наведения к этапу самонаведения снаряда на цель. В случае, если подрыв боевого заряда должен быть произведен в заданной области вблизи цели, этап самонаведения может отсутствовать; при этом полет на заданной высоте происходит до передачи команды перевода снаряда в пикирование на цель или до момента подрыва боевого заряда.

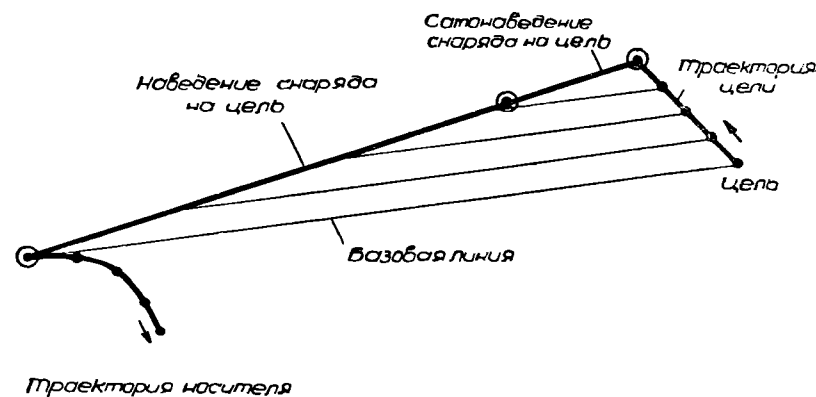


Рис. 1.6. Траектории снаряда и носителя в горизонтальной плоскости для систем «воздух—море». Наведение по методу параллельного сближения с последующим этапом самонаведения снаряда на цель

Некоторые характерные траектории снаряда и носителя в горизонтальной плоскости (проекции траекторий снаряда и носителя на горизонтальную плоскость) приведены на рис. 1.5 и 1.6.

а) Траектории с теленаведением снаряда по методу накрытия цели с последующим этапом самонаведения снаряда на цель (рис. 1.5).

После старта снаряд выводится на направление носитель — цель и наводится на цель по методу накрытия цели до перевода его в режим самонаведения. Перед переходом на этап самонаведения возможен этап автономного полета снаряда. Если с точки зрения требуемой точности наведения снаряда на цель может быть исключен этап самонаведения, этап автономного полета может быть продлен вплоть до момента подрыва боевой части.

б) Траектории с наведением снаряда по методу параллельного сближения с последующим этапом самонаведения снаряда на цель (рис. 1.6).

В момент старта снаряда на носителе вырабатывается некоторое направление; обычно за такое направление принимают направление линии носитель — цель в момент старта (базовая линия). В процессе наведения линия снаряд — цель параллельна базовой линии.

Траектория снаряда при применении этого метода не зависит от траектории носителя после старта снаряда, и носитель имеет возможность в процессе наведения снаряда на цель свободно маневрировать в отличие от случая наведения снаряда по методу накрытия цели, когда возможности маневра носителя ограничены. При наведении снаряда на цель по методу параллельного сближения углы между направлениями носитель — цель и носитель — снаряд могут быть значительными. Поэтому при малых углах раствора луча станции слежения за целью возможно лишь телеуправление снарядом.

Как и в предыдущем случае, при этом возможен этап автономного полета снаряда у цели или перед переходом в режим самонаведения.

2. Состав системы управления. Самолет-снаряд. Самолет-носитель. Аппаратура управления

Системы «воздух — море» содержат самолеты-снаряды, самолет-носитель и аппаратуру управления. К аппаратуре управления относятся аппаратура поиска, обнаружения цели и слежения за целью, аппаратура телеконтроля и слежения за снарядом, аппаратура выработки и передачи команд управления в режиме наведения, аппаратура выработки команд управления в режиме самонаведения, аппаратура автономного управления снарядом и автопилот снаряда. Ниже дается краткая характеристика перечисленных составных частей системы «воздух — море».

а) Самолет-снаряд

В системах «воздух — море» применяются снаряды самолетного типа. Вес снаряда выбирается с учетом возможности подвески его под самолетом-носителем, веса установленных на снаряде аппаратуры управления и боевого заряда и заданной дальности полета снаряда.

В качестве маршевого двигателя снаряда обычно используются турбореактивные двигатели; возможно также применение прямоточных и жидкостных двигателей.

Скорость полета снаряда должна превышать скорость носителя; возможно применение снарядов с околосвуковыми и сверхзвуковыми скоростями.

На снаряде устанавливаются автопилот, связанный с рулями и элеронами снаряда, и радиоаппаратура с соответствующими антенными устройствами. Обычно в аппаратуре наведения используется хвостовая штыревая антенна, а в аппаратуре самонаведения — антенна, помещенная в носовой части снаряда и закрытая радиопрозрачным обтекателем. На снаряде устанавливаются боевой заряд, инерционные взрыватели и взрыватели, обеспечивающие подрыв боевой части в заданной области вблизи цели.

На этапе летных испытаний системы на снаряде устанавливается контрольно-измерительная и радиотелеметрическая аппаратура, размещаемая обычно в отсеках, в которых при боевом использовании снаряда размещается боевой заряд и взрыватели.

б) Самолет-носитель

В качестве самолета-носителя используется специально спроектированный или специально приспособленный бомбардировщик, оборудованный устройством для подвески под фюзеляжем или крыльями одного или нескольких снарядов, аппаратурой поиска, обнаружения цели и слежения за целью, аппаратурой управления снарядом, аппаратурой контроля работы двигателя и аппаратурой контроля функционирования аппаратуры носителя и снаряда.

На этапе летных испытаний на носителе устанавливается контрольно-измерительная и регистрирующая аппаратура.

в) Аппаратура поиска, обнаружения цели и слежения за целью

В состав аппаратуры поиска, обнаружения цели и слежения за целью входят приемно-передающее устройство, антенное устройство, следящие системы и индикаторные устройства.

При поиске цели производится качание (сканирование) луча антенного устройства в азимутальной плоскости. После обнаружения цели происходит переход на автоматическое или ручное слежение за целью (сопровождение цели). В зависимости от принятого метода управления снарядом и от выбранной формы луча антенного устройства слежение за целью может происходить либо только по азимуту, либо по азимуту и углу места.

Кроме слежения за целью по угловым координатам, осуществляется слежение за целью по дальности; таким образом, значительно повышается разрешающая способность системы и появляется возможность выбора цели для сопровождения. Может быть предусмотрен также поиск цели по дальности.

Для совмещения равносигнальной линии луча антенны с направлением на цель служат следящие системы; для разгрузки этих сле-

дящих систем от возмущений, связанных с колебаниями носителя, а также для устранения ошибок измерения координат цели, связанных с кренами носителя, применяется гироскопическая стабилизация положения антенных устройств.

Индикаторные устройства позволяют в режиме обнаружения производить выбор цели, а в режиме сопровождения контролировать работу системы; в условиях организованных помех, создаваемых противником, индикаторные устройства позволяют осуществлять ручное сопровождение цели по изображению цели на фоне помех на их экранах.

г) Аппаратура слежения за снарядом

Система слежения за снарядом аналогична системе слежения за целью; однако работает она не по отраженным от снаряда сигналам, а по сигналам, принимаемым от установленного на снаряде приемопередчика. В большинстве случаев также предусматривается гироскопическая стабилизация положения антенных устройств системы слежения за снарядом.

д) Аппаратура выработки и передачи команд управления в режиме наведения

В случаях управления снарядом по методу равносигнальной линии ориентирующим направлением, вдоль которого происходит наведение снаряда на цель, является равносигнальное направление антенны системы обнаружения цели и слежения за целью. Если снаряд не находится на равносигнальной линии, принимаемые на снаряде импульсы системы обнаружения цели и слежения за целью промодулированы по амплитуде с частотой, равной частоте сканирования луча антенны. Глубина амплитудной модуляции и фаза огибающей импульсов относительно некоторого, передаваемого с носителя синхронизирующего (опорного) сигнала определяют величину и направление отклонения снаряда от равносигнальной линии. Аппаратурой выработки команд управления производится преобразование указанных сигналов и умножение их на величину, пропорциональную дальности носитель — цель; в результате получают напряжения, пропорциональные линейным отклонениям снаряда от равносигнальной линии в плоскостях, связанных с самолетом-носителем, и используемые для управления снарядом.

В случае телеуправления снарядом измеренные системами слежения за целью и снарядом координаты используются для выработки команд управления на носителе. При помощи устройства телеуправления команды передаются на снаряд и поступают в автопилот. Системы слежения за целью и снарядом осуществляют при этом функции телеконтроля положения цели и снаряда, поскольку с их помощью измеряются координаты, используемые при выработке команд управления на носителе. Передающая антенна устройства телеуправления обычно конструктивно совмещается с антенной системы слежения за снарядом.

е) Аппаратура выработки команд управления в режиме самонаведения

В случае использования полуактивного метода самонаведения цель облучается с носителя; поэтому слежение за целью с радиолокационной станции носителя должно осуществляться до конца управления, т. е. до момента попадания снаряда в цель.

В носовой части снаряда устанавливается антенна системы самонаведения со сканирующим лучом, принимающая отраженные от цели сигналы. В случае, если равносигнальная линия луча антенны не совпадает с направлением на цель, принимаемые на снаряде импульсы промодулированы по амплитуде с частотой, равной частоте сканирования; глубина модуляции и фаза огибающей относительно вырабатываемого на снаряде опорного сигнала определяют величину и направление отклонения равносигнальной линии луча от направления на цель. В результате преобразования указанных сигналов получают напряжения, пропорциональные угловым отклонениям равносигнальной линии от направления на цель в плоскостях, связанных со снарядом, или в плоскостях, соответствующих положению снаряда в момент разарретирования гироскопа, установленного на снаряде.

Для повышения помехозащищенности системы самонаведения и ее разрешающей способности на снаряде предусматривается автоматическое селектирование целей по дальности, обеспечивающее возможность приема на снаряде только тех импульсов, которые приходят на снаряд одновременно с импульсами, отраженными от выбранной цели.

В случае использования активного метода самонаведения, когда облучение цели производится со снаряда, носитель на этапе самонаведения снаряда может совершать произвольный маневр.

Иногда до перехода на самонаведение предусматривается поиск цели в азимутальной плоскости; кроме того, для обеспечения захвата системой самонаведения сигналов, отраженных целью, может быть предусмотрена возможность перемещения равносигнальной линии луча относительно продольной оси снаряда путем смещения оси сканирования антенны; после перехода в режим самонаведения антенна должна автоматически перейти в положение, заранее выбранное, исходя из требования обеспечения необходимой точности попадания снаряда в цель. В случае, когда ось сканирования антенны самонаведения жестко связана со снарядом, возникают трудности в обеспечении необходимой точности попадания снаряда в движущуюся цель. Необходимая точность попадания может быть достигнута при самонаведении снаряда в упрежденную точку, в связи с чем оказывается целесообразным в ряде случаев применение в системах самонаведения антенн, следящих за целью.

ж) Аппаратура автономного управления снарядом по высоте

Аппаратура автономного управления снарядом по высоте включает: программные устройства, обеспечивающие ввод снаряда в луч

или вывод его на заданную высоту; высотомеры и систему перевода снаряда в пикирование на цель.

Для измерения отклонений высоты полета снаряда от заданной могут быть использованы радиовысотомеры и барометрические высотомеры (статоскопы).

При применении барометрического высотомера необходимо измерять статическое давление. Для этого на снаряде устанавливаются приемники статического давления. Приемники статического давления выносятся вперед по полету и устанавливаются на концах крыльев или в носовой части снаряда.

3) Автопилот снаряда

Автопилот предназначен для стабилизации снаряда относительно центра тяжести и управления его полетом и непосредственно воздействует на исполнительные органы снаряда — рули и элероны.

Автопилот состоит из гироскопических устройств, измеряющих угловые отклонения снаряда от заданного положения и их производные, усилительно-преобразующих устройств и приводных устройств — рулевых машин, служащих для отклонения рулей и элеронов снаряда. Управление полетом снаряда осуществляется через задающие устройства автопилота, на которые поступают сигналы с аппаратуры радиоуправления, высотомеров и программных устройств.

3. Структурные схемы системы управления

На рис. 1.7, 1.8 и 1.9 показано взаимное положение и приведены параметры движения носителя H , снаряда C и цели $Ц$ в вертикальной плоскости для этапа теленаведения снаряда по методу накрытия

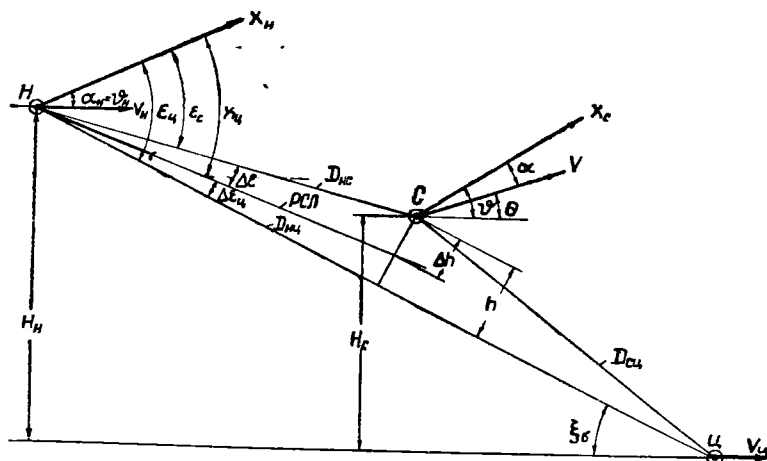


Рис. 1.7. Взаимное расположение носителя, снаряда и цели при теленаведении снаряда в вертикальной плоскости по методу накрытия и параметры их движения

цели, для этапа автономного полета снаряда на заданной высоте и для этапа самонаведения снаряда при жестко связанной со снарядом антенне самонаведения.

На рис. 1.10, 1.11 и 1.12 представлены соответствующие структурные схемы, которые иллюстрируют последовательность преобразования параметров, характеризующих состояние системы управления.

На рис. 1.7—1.12 приняты следующие обозначения:

- H — самолет-носитель;
- C — самолет-снаряд;
- $Ц$ — цель;
- $РСЛ$ — равносигнальная линия (ось сканирования антенны);
- H_n, H_c — высоты полета носителя и снаряда;
- V_n, V, V_c — скорости носителя, снаряда и цели;
- $D_{нц}, D_{нс}, D_{сц}$ — дальности носитель — цель, носитель — снаряд и снаряд — цель;
- H_0 — заданная высота полета снаряда;
- h — линейное отклонение снаряда от линии носитель — цель;

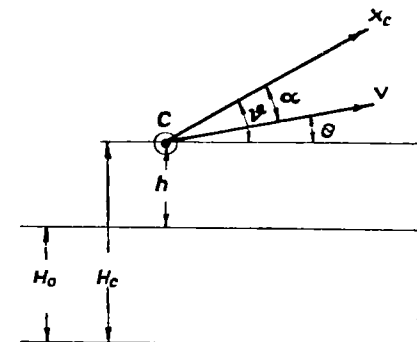


Рис. 1.8. Положение снаряда при автономном полете на заданной высоте и параметры его движения

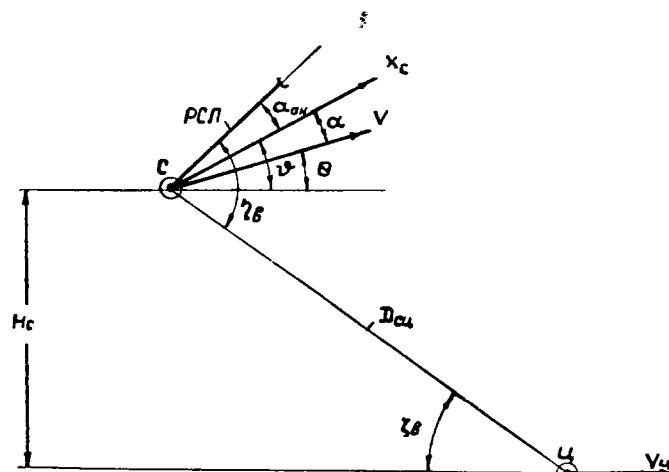


Рис. 1.9. Взаимное расположение снаряда и цели при самонаведении снаряда в вертикальной плоскости и параметры их движения

Δh — линейное отклонение снаряда от равносигнальной линии;

θ — угол наклона траектории снаряда (вектора скорости снаряда) к горизонту;

α α_n — углы атаки снаряда и носителя;

ϑ , ϑ_n — углы тангажа снаряда и носителя;

X_n , X_c — продольные оси носителя и снаряда;

χ_n — отклонение равносигнальной линии луча системы слежения за целью от продольной оси носителя;

$\Delta \varepsilon_n$ — отклонение равносигнальной линии луча системы слежения за целью от направления на цель;

$\Delta \varepsilon$ — угол между направлением на снаряд и направлением равносигнальной линии луча системы слежения за целью;

α_n — угол между направлением оси сканирования антенны самонаведения и продольной осью снаряда;

η_3 — угол между направлением оси сканирования антенны самонаведения и направлением на цель;

ζ_3 — угол между направлением снаряд — цель и горизонтальной плоскостью;

ξ_b — угол между направлением носитель — цель и горизонтальной плоскостью;

ε_n — угол между продольной осью носителя и направлением на цель;

ϑ_3 — задаваемый автопилотом угол тангажа снаряда;

ε_c — угол между продольной осью носителя и направлением носитель — снаряд.

Случаю теленаведения снаряда по методу накрытия цели (рис. 1.7) соответствуют следующие кинематические соотношения:

$$D_{nc} \dot{\xi}_b = V_n \sin \xi_b - V_n \sin \xi_b;$$

$$h = (H_c - \sqrt{D_{cn}^2 - H_c^2} \operatorname{tg} \dot{\xi}_b) \cos \dot{\xi}_b;$$

$$\chi_n = \varepsilon_n - \Delta \varepsilon_n;$$

$$\varepsilon_c \approx \varepsilon_n - \frac{h}{D_{nc}};$$

$$\Delta \varepsilon = \chi_n - \varepsilon_c;$$

$$\Delta h \approx D_{nc} \Delta \varepsilon;$$

$$\dot{H}_c = V \sin \theta;$$

$$\varepsilon_n = \xi_b + \vartheta_n.$$

При малых значениях углов ξ_b и θ кинематические соотношения могут быть записаны следующим образом:

$$D_{nc} \dot{\xi}_b \approx (V_n - V_n) \xi_b; \quad (1.1)$$

$$h \approx H_c - D_{cn} \dot{\xi}_b; \quad (1.2)$$

$$\chi_n = \varepsilon_n - \Delta \varepsilon_n; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_c \approx \varepsilon_n - \frac{h}{D_{nc}}; \quad (1.4)$$

$$\Delta \varepsilon = \chi_n - \varepsilon_c; \quad (1.5)$$

$$\Delta h \approx D_{nc} \Delta \varepsilon; \quad (1.6)$$

$$\dot{H}_c \approx V \theta; \quad (1.7)$$

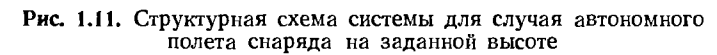
$$\varepsilon_n = \xi_b + \vartheta_n. \quad (1.8)$$

На структурной схеме (рис. 1.10), соответствующей рассматриваемому случаю теленаведения по методу накрытия цели при полете носителя в горизонтальной плоскости, звено 1 соответствует преобразованию скоростей V_n и V_n и дальности D_{nc} в угол ξ_b согласно уравнению (1.1). Согласно уравнению (1.8) по значениям угла ξ_b и угла α_n (равного углу ϑ_n при горизонтальном полете носителя, т. е. при угле наклона траектории его к горизонту, равному нулю) звено 2 определяется угол ε_n . Значение угла ε_n служит управляющим воздействием для системы слежения за целью. Выходной сигнал системы слежения за целью, соответствующий углу χ_n , определяется с погрешностью $\Delta \varepsilon_n$ согласно уравнению (1.3). Угол $\Delta \varepsilon$, равный согласно уравнению (1.5) разности углов χ_n и ε_c , служит управляющим воздействием для замкнутой системы теленаведения снаряда на цель. В звене 3 происходит преобразование сигнала, соответствующего углу $\Delta \varepsilon$, согласно уравнению (1.6) в величину Δh путем умножения на величину, соответствующую значению D_{nc} . Сигналы, пропорциональные Δh , поступают в звено 4, которое соответствует задающему устройству автопилота снаряда, вырабатывающему заданные углы тангажа снаряда ϑ_3 . Звено 5, характеризующее поведение снаряда с автопилотом, устанавливает связь между значениями угла ϑ_3 и угла наклона траектории снаряда θ , а звено 6 — связь между значениями угла θ , скорости V и высоты H_c согласно уравнению (1.7). Звено 7 соответствует умножению угла ξ_b на дальность D_{cn} , на выходе звена 8 согласно уравнению (1.2) образуется значение линейного отклонения h . В звене 9 в результате деления h на D_{nc} образуется величина $\frac{h}{D_{nc}}$, а в звене 10 по значениям ε_n и $\frac{h}{D_{nc}}$ образуется согласно уравнению (1.4) значение ε_c .

Как видно из рис. 1.10, система управления в режиме наведения по равносигнальной линии имеет две независимые замкнутые петли: замкнутую петлю системы слежения за целью и замкнутую петлю системы теленаведения снаряда на цель; первая определяет

Для этапа автономного полета снаряда на заданной высоте (рис. 1.8)

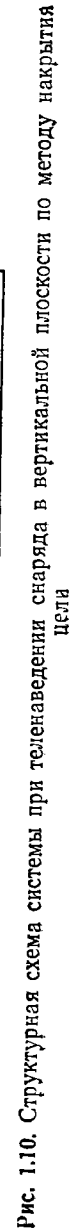
Величина h непосредственно измеряется на снаряде и поступает в звено 1, соответствующее задающему устройству автопилота (рис. 1.11). Вырабатываемый задающим устройством автопилота угол ϑ_3 поступает в звено 2, соответствующее снаряду с автопилотом. Звено 3 связывает угол наклона траектории снаряда к горизонту θ с высотой полета снаряда H_c .


$$D_{\text{цз}} \dot{\zeta}_B = V \sin(\zeta_B + \theta) - V_{\text{ц}} \sin \zeta_B;$$

$$\vartheta = \theta + \alpha.$$

$$D_{\text{cII}} \dot{\zeta}_3 \approx V\theta + (V - V_{\text{II}}) \zeta_3; \quad (1.10)$$

На структурной схеме (рис. 1.12), соответствующей этому случаю, в звене 1 происходит преобразование скоростей V , V_{ω} , дальности $D_{\text{сц}}$ и угла θ в угол ζ_3 ; в звене 2 по величинам углов ζ_3 , $\alpha_{\text{гн}}$ и $\vartheta = \alpha + \theta$ вырабатывается угол η_3 ; звено 3, соответствующее задающему устройству автопилота, устанавливает связь между значениями углов η_3 и ϑ_3 , и звено 4, соответствующее снаряду с автопилотом, устанавливает связь между углом ϑ_3 и углами α и θ .



Таким образом, на этапе самонаведения при применении жестко связанной со снарядом антенны система структурно проще, чем на этапе наведения. При применении антенны, следящей за целью, система слежения антенны за целью последовательно включается в замкнутую петлю системы самонаведения.

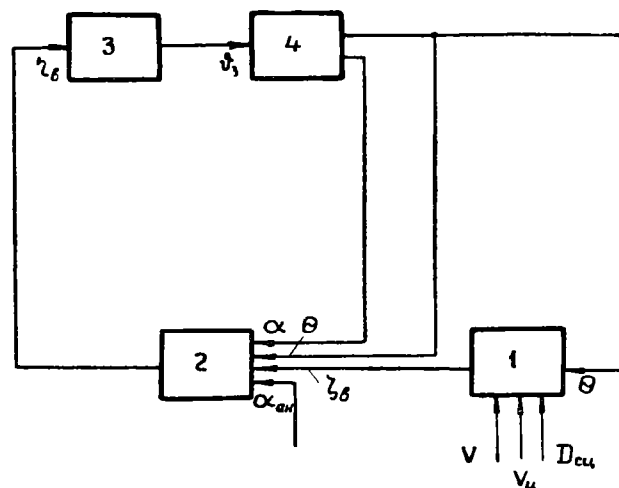


Рис. 1.12. Структурная схема системы при самонаведении снаряда в вертикальной плоскости

На рис. 1.13 и 1.14 показано взаимное расположение и приведены параметры движения носителя, снаряда и цели в горизонтальной плоскости для случая телеуправления снарядом по курсу по методу накрытия цели и для случая самонаведения по курсу. Структурная схема для случая телеуправления представлена на рис. 1.15.

На рис. 1.13, 1.14 и 1.15 приняты следующие обозначения:

- H — самолет-носитель;
- C — самолет-снаряд;
- $Ц$ — цель;
- $z_H, z_C, z_{Ц}$ — линейные отклонения носителя, снаряда и цели от отсчетной линии — некоторой фиксированной в пространстве линии;
- $V_H, V, V_{Ц}$ — скорости носителя, снаряда и цели;
- D_{HC}, D_{HC}, D_{CC} — дальности носитель — снаряд, носитель — цель и снаряд — цель;
- h — линейное отклонение снаряда от заданной траектории;
- $\varphi_H, \varphi, \varphi_{Ц}$ — углы между векторами скорости носителя, снаряда и цели и отсчетной линией;
- ψ_H, ψ — углы курса носителя и снаряда;
- β_H, β — углы скольжения носителя и снаряда;

- X_H, X_C — продольные оси носителя и снаряда;
- $\epsilon_c, \epsilon_{ц}$ — углы между продольной осью носителя и направлениями на снаряд и на цель;
- $\chi_c, \chi_{ц}$ — углы между продольной осью носителя и равносигнальными линиями лучей систем слежения за снарядом и целью;
- $\Delta\epsilon_c, \Delta\epsilon_{ц}$ — ошибки слежения за снарядом и целью;
- η_H — угол между осью сканирования антенны самонаведения и направлением на цель;
- ξ_H — угол между направлением носитель — цель и отсчетной линией;

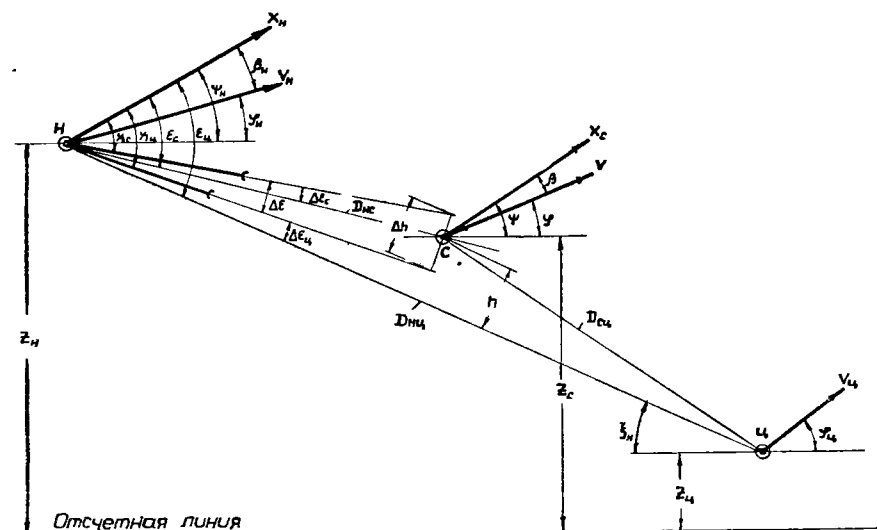


Рис. 1.13. Взаимное расположение носителя, снаряда и цели при телеуправлении снарядом по курсу по методу накрытия цели и параметры их движения

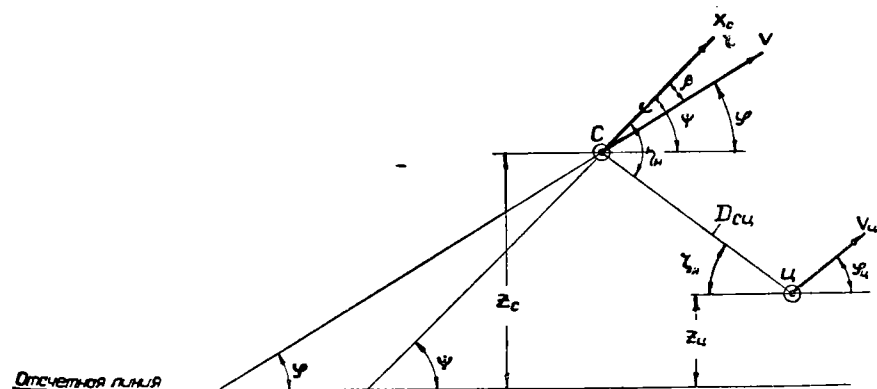


Рис. 1.14. Взаимное расположение снаряда и цели при самонаведении снаряда по курсу и параметры их движения

ζ_n — угол между направлением снаряд — цель и отсчетной линией;
 ψ_3 — задаваемый снаряду угол курса.

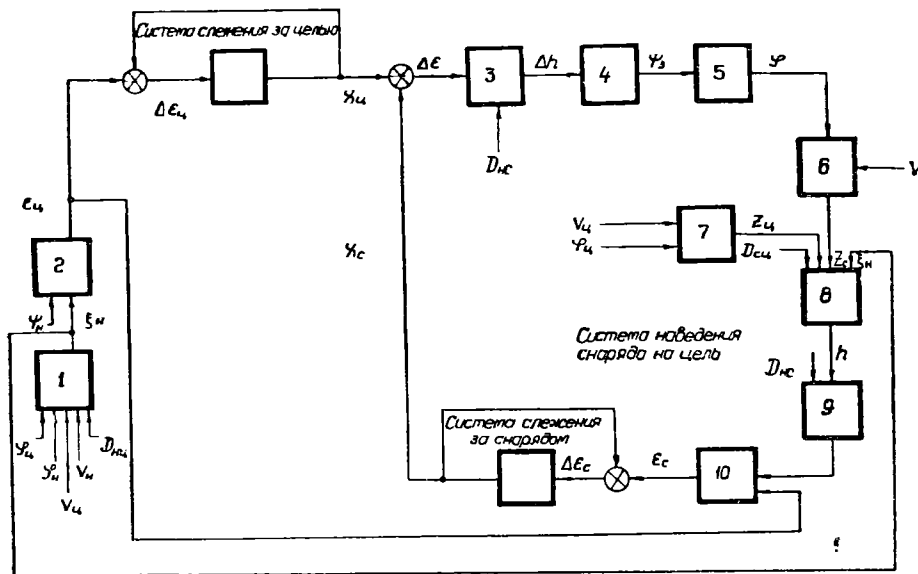


Рис. 1.15. Структурная схема системы при телеуправлении снарядом по курсу по методу накрытия цели

Для случая телеуправления снаряда могут быть записаны следующие кинематические соотношения:

$$D_{nc} \xi_n = V_n \sin(\xi_n + \varphi_n) - V_u \sin(\xi_n + \varphi_n); \quad (1.12)$$

$$h = [(z_c - z_u) - \sqrt{D_{cu}^2 - (z_c - z_u)^2} \operatorname{tg} \xi_n] \cos \xi_n; \quad (1.13)$$

$$\chi_u = \epsilon_u - \Delta \epsilon_u; \quad (1.14)$$

$$\chi_c = \epsilon_c - \Delta \epsilon_c; \quad (1.15)$$

$$\epsilon_c \approx \epsilon_n - \frac{h}{D_{nc}}; \quad (1.16)$$

$$\Delta \epsilon = \chi_u - \chi_c; \quad (1.17)$$

$$\Delta h \approx D_{nc} \Delta \epsilon; \quad (1.18)$$

$$\dot{z}_c = V \sin \varphi; \quad (1.19)$$

$$\dot{z}_u = V_u \sin \varphi_u; \quad (1.20)$$

$$\epsilon_u = \xi_n + \psi_n. \quad (1.21)$$

На структурной схеме рис. 1.15, соответствующей рассматриваемому случаю телеуправления, звено 1 связывает согласно уравнению (1.12) значения φ_n , φ_u , V_n , V_u и D_{nc} со значением ξ_n , звено 2 согласно уравнению (1.21) связывает значения ξ_n и ψ_n со значе-

нием ϵ_n . Значение угла ϵ_n служит управляющим воздействием для системы слежения за целью. Выходной сигнал системы слежения за целью, соответствующий углу χ_u , определяется с погрешностью $\Delta \epsilon_u$ согласно уравнению (1.14). Угол $\Delta \epsilon$, равный согласно уравнению (1.17) разности углов χ_u и χ_c , служит управляющим воздействием для замкнутой петли системы наведения снаряда на цель. Звено 3 согласно уравнению (1.18) связывает значения $\Delta \epsilon$, D_{nc} и Δh . Сигналы, пропорциональные Δh , поступают в звено 4, соответствующее задающему устройству автопилота, вырабатывающему задаваемый снаряду угол курса ψ_3 ; звено 5, характеризующее поведение снаряда с автопилотом, устанавливает связь между углами ψ_3 и φ . Звено 6 согласно уравнению (1.19) связывает значения φ и V со значением z_c . Звено 7 связывает согласно уравнению (1.20) значения V_u , φ_u со значением z_u , а звено 8 согласно уравнению (1.13) связывает значения D_{cu} , z_c , z_u и ξ_n со значениями h . В звене 9 по значениям h и D_{nc} определяется значение $\frac{h}{D_{nc}}$, а в звене 10 по значениям ϵ_n и $\frac{h}{D_{nc}}$ определяется согласно уравнению (1.16) ϵ_c . Угол ϵ_c служит управляющим воздействием для системы слежения за снарядом. Выходной сигнал системы слежения за снарядом, соответствующий углу χ_c , определяется с погрешностью $\Delta \epsilon_c$ согласно уравнению (1.15).

Как видно из приведенной схемы (рис. 1.15), система телеуправления в режиме наведения содержит две независимые замкнутые петли: замкнутую петлю системы слежения за целью и замкнутую петлю системы наведения снаряда на цель. При этом в замкнутую петлю системы наведения снаряда последовательно включается система слежения за снарядом.

Структурная схема системы самонаведения снаряда по курсу аналогична схеме системы самонаведения снаряда в вертикальной плоскости, представленной на рис. 1.12.

1.4. СИСТЕМЫ «ЗЕМЛЯ — МОРЕ»

1. Методы управления и типовые траектории

Система «земля — море» состоит из стартовой установки, самолетов-снарядов и аппаратуры управления, установленной на земле и на самолетах-снарядах.

Работа системы управления может быть разбита на следующие основные этапы:

а) поиск и обнаружение цели, переход на автоматическое или ручное слежение за целью, установка направляющих стартовой установки в направлении выстрела, подготовка к старту снаряда;

б) старт снаряда, полет снаряда со стартовым ускорителем и отделение ускорителя, автономный полет снаряда по заданной программе, ввод снаряда в луч станции слежения за целью или захват сигналов приемопередатчика снаряда лучом станции слежения за снарядом;

- в) наведение снаряда на цель;
- г) самонаведение снаряда на цель.

Наведение снаряда по курсу может осуществляться теми же методами, что и в системе «воздух — море»; однако в этом случае отпадает основное преимущество использования метода телеуправления в системах «воздух — море», связанное с возможностью маневрирования носителя. Поэтому для наведения снаряда по курсу пред-

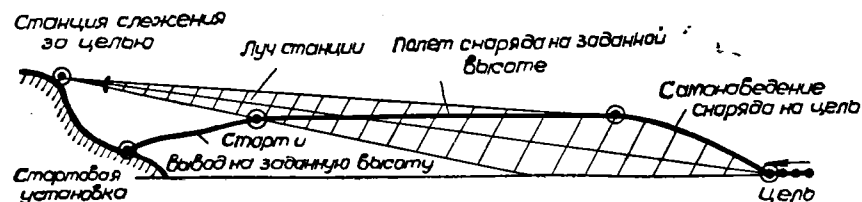


Рис. 1.16. Типовая траектория снаряда в вертикальной плоскости для систем «земля—море»

почтительно использование в системах «земля — море» метода наведения по равноточной линии, позволяющего использовать сравнительно простую аппаратуру управления.

Для наведения снаряда по высоте использование метода наведения по равноточной линии практически исключено из-за малых

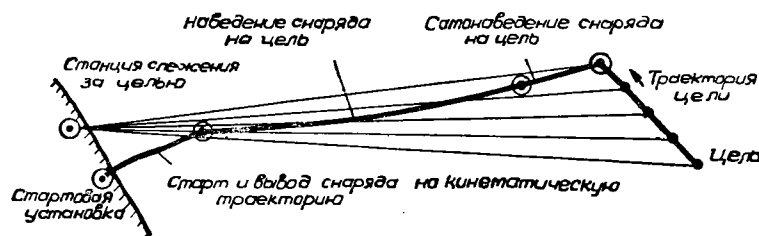


Рис. 1.17. Типовая траектория снаряда в горизонтальной плоскости для систем «земля—море»

углов наклона луча станции наведения к горизонту и сильного влияния на структуру электромагнитного поля в вертикальной плоскости сигналов, отраженных от морской поверхности.

Полет снаряда в вертикальной плоскости в режиме наведения происходит автономно на заданной высоте, поддерживаемой при помощи барометрического высотомера или радиовысотомера.

На рис. 1.16 представлена одна из возможных траекторий снаряда в вертикальной плоскости, а на рис. 1.17 — в горизонтальной плоскости. Структурные схемы системы управления не отличаются от соответствующих схем системы «воздух — море»; из схем исключаются лишь параметры движения носителя.

2. Особенности самолета-снаряда и аппаратуры управления.

Стартовая позиция

Особенности самолета-снаряда связаны с необходимостью старта с земли с нулевой начальной скоростью. В момент схода снаряда с направляющих стартовой установки его воздушная скорость должна быть достаточной для того, чтобы аэродинамические силы и моменты могли компенсировать действующие на снаряд возмущения.

Чтобы обеспечить быстрый разгон снаряда на начальном участке траектории, предусматривается дополнительный, отделяющийся от снаряда стартовый двигатель (ускоритель). Ускоритель устанавливается под некоторым углом к продольной оси снаряда; тяга ускорителя создает дополнительную подъемную силу и обеспечивает полет снаряда с набором высоты на начальном участке траектории.

Тяга ускорителя выбирается таким образом, чтобы продольные перегрузки не превосходили перегрузок, на которые рассчитывается конструкция бортовой аппаратуры снаряда. Длина стартовых направляющих выбирается минимально возможной.

Аппаратура управления значительно отличается от аппаратуры управления систем «воздух — море». Основные отличия связаны с необходимостью обеспечить надежный и безопасный старт и с работой в условиях больших перегрузок.

Наземный комплекс, состоящий из станции обнаружения цели и слежения за целью, станции наведения снаряда, стартовых установок, системы управления стартовыми установками и аппаратуры предстартового контроля, вместе с необходимыми сооружениями и вспомогательными устройствами образует стартовую позицию.

Подвижная стартовая установка должна к моменту старта разворачиваться в направлении, обеспечивающее ввод снаряда в луч станции слежения за целью или оптимальные условия захвата сигналов приемопередатчика снаряда лучом наземной станции наведения снаряда.

Антенна станции обнаружения цели и слежения за целью должна быть вынесена на максимальную высоту, обеспечивающую необходимую дальность прямой видимости цели.

Стартовые установки могут быть значительно удалены от станций обнаружения цели и слежения за целью и станции наведения; однако при этом затрудняется ввод снаряда в луч.

1.5. СИСТЕМЫ «МОРЕ — МОРЕ»

Системы «море — море» предназначены для поражения кораблей или соединений кораблей противника управляемыми самолетами-снарядами, стартовыми с кораблей различных классов.

По принципу построения эти системы не отличаются от систем «земля — море» и «воздух — море». Основные отличия связаны со стартом снаряда с подвижного основания и с установкой на подвижном основании антенны станции обнаружения цели и слежения за целью и станции наведения снаряда на цель.

Старт с подвижного основания может производиться либо со стартовой установки, жестко связанной с подвижным основанием, либо с гиросtabilизированной стартовой установки. В первом случае момент разарретирования гироскопов автопилота снаряда и момент старта должны быть точно согласованы с фазой качаний подвижного основания.

Антенна станции обнаружения цели и слежения за целью и станции наведения должна устанавливаться на мачте; обычно предусматривается гироскопическая стабилизация антенны.

Так как высота установки антенны не может быть большой, то максимальная дальность стрельбы при применении полуактивного метода самонаведения также не может быть значительной; при применении активного метода самонаведения дальность может быть увеличена.

При применении активного метода самонаведения процесс управления может быть сведен к автономному управлению снарядом по заданной программе и самонаведению. В этом случае отпадает необходимость в станции слежения за целью и станции наведения снаряда на цель.

Некоторые затруднения в отношении старта и ввода в луч связаны с ходом корабля, с которого стартует снаряд.

1.6. СИСТЕМЫ «ВОЗДУХ — ЗЕМЛЯ»

Системы «воздух — земля» предназначены для поражения самолетами-снарядами наземных целей значительной протяженности. Этим определяются основные отличия систем «воздух — земля» от систем «воздух — море».

В системах «воздух — земля» самонаведение обычно не используется. Наведение снаряда на цель осуществляется в большинстве случаев только в горизонтальной плоскости, причем предусматривается возможность автономного полета снаряда на конечном участке траектории; траектория снаряда в вертикальной плоскости может быть задана автономными средствами — программным устройством и высотомером. При достижении снарядом заданного расстояния и высотомером. При достижении снарядом заданного расстояния до цели с носителя может быть подана команда на перевод снаряда в пикирование на цель или на подрыв боевой части. В случае, если после перехода снаряда в режим автономного полета связь его с носителем полностью прекращается, команда перевода снаряда в пикирование может вырабатываться на снаряде с помощью устройств, определяющих дальность снаряд — цель.

В случае, если дальность снаряд — цель вырабатывается на снаряде с недостаточной точностью, ее значения на участке управляемого полета должны корректироваться с носителя; на последнем для этого должно предусматриваться дальномерное устройство, вырабатывающее с высокой точностью дальность снаряд — цель.

Вследствие того, что цель неподвижна и ее местоположение точно известно, в системах «воздух — земля» имеется также возможность осуществлять наведение снаряда на цель без использования радиолокационных средств определения координат цели; для этого нави-

гационная аппаратура носителя, например его астронавигационная аппаратура, должна с достаточной точностью определять географические координаты носителя.

Если точность наведения на цель по навигационным данным недостаточна, может быть использовано комбинированное наведение; при этом на носителе определяются по навигационным данным координаты носителя относительно цели и производится пуск снаряда на дальностях, превышающих дальность радиолокационной видимости цели; носитель после старта снаряда следует к цели и на некоторой дальности при помощи радиолокационных средств уточняет свои координаты; в этом случае при достаточной точности наведения можно значительно увеличить дальность пуска снаряда и, следовательно, увеличить минимальную дальность подлета носителя к цели.

При наведении снаряда на цель по азимуту методом накрытия цели ограничен допустимый маневр носителя. Если в системе предусмотрена корректировка вырабатываемой на снаряде дальности снаряд — цель по данным измерения дальности снаряд — цель на носителе, то наведение снаряда по азимуту целесообразно осуществлять методом телеуправления с использованием для передачи команд корректировки дальности снаряд — цель и команд наведения снаряда по азимуту одной радиолинии.

Типовые траектории снаряда и носителя в вертикальной и горизонтальной плоскостях и структурные схемы систем управления не отличаются от соответствующих схем систем «воздух — море»; ввиду неподвижности цели из структурных схем исключаются параметры ее движения.

На рис. 1.18 приведен пример структурной схемы системы выработки дальности снаряд — цель и команд перевода снаряда в пикирование или подрыва боевой части.

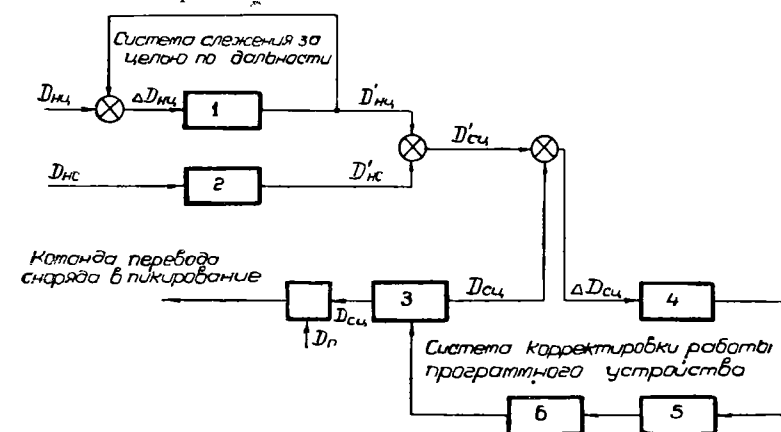


Рис. 1.18. Структурная схема системы выработки дальности снаряд — цель и перевода снаряда в пикирование.

1 — измерительное и исполнительное устройства; 2 — измерительное устройство; 3 — программное устройство; 4 — система передачи команд с носителя на снаряд; 5 — преобразующее устройство; 6 — исполнительное устройство

По приборным значениям измеряемых на носителе дальностей носитель — цель $D'_{нц}$ и носитель — снаряд $D'_{нс}$ определяется приборное значение дальности снаряд — цель $D'_{сц}$. Эта дальность сравнивается с дальностью снаряд — цель $D_{сц}$, вырабатываемой на снаряде специальным программным устройством и передаваемой на носитель. По сигналу рассогласования $\Delta D_{сц} = D'_{сц} - D_{сц}$, вырабатываемому на носителе и передаваемому на снаряд, корректируется работа программного устройства. После прекращения корректировки программное устройство продолжает вырабатывать дальность $D_{сц}$ и при заданном значении $D_{сц}$, равном $D_{п}$, выдает команду перевода снаряда в пикирование.

Так как наземные цели хорошо защищены и работа систем «воздух — земля» будет происходить при активном противодействии противника, то в этих системах особое внимание должно уделяться скрытности работы, помехозащищенности и обеспечению малой уязвимости системы. Существенно, чтобы снаряд был доведен до цели даже в аварийных случаях, когда система слежения за целью или система телеуправления выведены из строя.

1.7. СИСТЕМЫ «ЗЕМЛЯ — ЗЕМЛЯ»

Системы «земля — земля» предназначены для поражения стартовыми с земли снарядами наземных целей значительной протяженности.

Старт, ввод в луч и полет в режиме наведения в системах «земля — земля» производятся так же, как в системах «земля — море». В системе отсутствует слежение за целью; луч станции наведения снаряда привязывается к местности по методам, применяемым

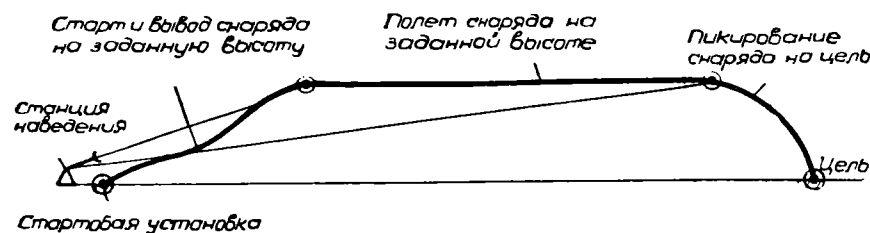


Рис. 1.19. Типовая траектория снаряда в вертикальной плоскости для систем «земля — земля»

в артиллерии, и устанавливается неподвижно в направлении на цель. Высота полета снаряда выбирается в соответствии с дальностью стрельбы из условий получения прямой радиолокационной видимости снаряда в момент подрыва боевой части или в момент перевода снаряда в пикирование на цель.

Конечный участок траектории и методы управления по дальности ничем не отличаются от принятых в системах «воздух — земля».

Отсутствие системы слежения за целью и самонаведения сильно упрощает аппаратуру управления. Возможная траектория снаряда в вертикальной плоскости приведена на рис. 1.19.

В системах «земля — земля» особое внимание должно быть уделено транспортабельности стартовых установок, станций и снарядов и сокращению времени подготовки стартовой позиции и снарядов к выстрелу.

Высоту полета снаряда целесообразно выбирать в каждом конкретном случае минимально допустимой с точки зрения получения необходимой дальности.

1.8. СИСТЕМЫ «МОРЕ — ЗЕМЛЯ»

Системы «море — земля» весьма близки к системам «земля — земля». Основные отличия заключаются в старте снаряда с подвижного основания — корабля или подводной лодки — и в необходимости стабилизировать антенну станции наведения. Дополнительные трудности возникают с вводом снаряда в луч станции наведения и с выводом снаряда на заданное направление в случае, если направление старта нельзя совместить с направлением на цель.

Точность стрельбы ниже, чем в системах «земля — земля», в связи с невозможностью точного определения географических координат корабля, особенно в условиях отсутствия видимости звезд.

По сравнению с системами «земля — земля» в системах «море — земля» условия распространения радиоволн более благоприятны из-за отсутствия на пути их распространения возвышенностей и местных предметов.

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе излагаются методы расчета и анализа рассматриваемых систем управления.

Глава составлена с учетом того, что в настоящее время имеется весьма большое количество руководств и монографий, посвященных изложению вопросов теории, расчета и анализа систем управления. Поэтому основное внимание уделялось изложению известных*, а также специально разработанных методов, нашедших наибольшее применение в практике проектирования систем управления. При этом во всех случаях изыскивались по возможности простые способы расчета и требуемые для практики расчетные соотношения. Там, где это представлялось возможным, без ущерба для понимания излагаемого вопроса некоторые промежуточные выкладки опущены.

В главе приводятся методы анализа устойчивости, построения переходных и установившихся процессов и расчета ошибок в системах управления. В связи с тем, что одним из основных вопросов проектирования системы управления является определение вероятности попадания снаряда в цель, в главе рассмотрены методы вычисления вероятности попадания при стрельбе одним снарядом или серией.

Глава завершается рассмотрением принципов моделирования процессов, происходящих в системах управления, и выбора параметров этих систем с помощью моделирующих установок.

2.1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Одной из основных задач теории автоматического регулирования является изучение процессов в системах управления. Изучение производится путем исследования уравнений, описывающих системы управления. При этом задача разделяется на две части.

Первой частью задачи является изучение устойчивости того или иного установившегося состояния системы в реальных условиях (устойчивости систем автоматического управления).

Второй частью задачи является изучение характера процессов, протекающих в системе при различных воздействиях на нее.

* Некоторые вопросы в этой главе освещены в соответствии с изложением их в книгах Солодовникова В. В. и др. (Основы автоматического регулирования. Теория. Машгиз, 1954) и Вентцель Е. С. (Теория вероятностей. Изд. ВВИА им. Жуковского, 1952).

1. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Под устойчивостью системы автоматического управления подразумевается свойство ее переходить к установившемуся состоянию после прекращения действия возмущения, которое вывело систему из установившегося состояния.

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейных систем (систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями) с постоянными коэффициентами является отрицательность действительных частей всех корней характеристических уравнений систем. Анализ устойчивости, таким образом, сводится к определению знаков действительных частей корней характеристического уравнения системы, или, что одно и то же, к установлению расположения этих корней на комплексной плоскости.

Фактическое вычисление корней весьма просто лишь для уравнения первой и второй степеней. Общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степеней известны, но они громоздки и практически мало удобны. Уравнения более высоких степеней вообще не имеют общих выражений для корней. Поэтому важное значение приобретают методы анализа, которые позволяют определить устойчивость системы, минуя вычисление корней характеристического уравнения.

Существуют различные методы анализа устойчивости (критерии устойчивости). С математической точки зрения эти методы эквивалентны, так как они основываются на одном и том же условии устойчивости (все корни характеристического уравнения должны лежать в левой части комплексной плоскости).

Наиболее широкое применение при анализе рассматриваемых систем управления получили следующие методы анализа устойчивости: метод определения соотношений между коэффициентами характеристического уравнения, метод частотных характеристик, метод построения областей устойчивости в плоскости параметров (метод D-разбиения).

Целесообразный выбор того или иного метода при решении конкретных задач позволяет произвести исследование устойчивости наиболее простым путем.

а) Основные понятия

Математическим аппаратом исследования линейных систем управления является преобразование Лапласа.

Преобразованием Лапласа или изображением функции $x(t)$ называется функция $X(p)$ комплексного переменного p :

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (2.1)$$

Преобразование Лапласа применимо для функций, удовлетворяющих условию

$$x(t) = 0 \quad \text{при } t < 0,$$

в том случае, когда можно выбрать такое вещественное число c_0 , что при всех $c > c_0$

$$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-ct} dt < \infty.$$

Величина c_0 называется абсциссой абсолютной сходимости интеграла (2.1) для изображения функции $x(t)$.

Обратное преобразование Лапласа позволяет определить функцию $x(t)$ (оригинал) по ее изображению $X(p)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp, \quad (2.2)$$

где c — число, большее абсциссы абсолютной сходимости c_0 .

Преобразование Лапласа дает возможность представлять дифференциальные уравнения, связывающие воздействия с зависящими от них переменными величинами системы (переменными величинами звеньев или элементов системы), в виде алгебраических уравнений изображений этих воздействий и величин. Решая алгебраические уравнения, можно, например, получить изображение выходной величины в зависимости от изображения воздействия.

Применяя к изображению выходной величины обратное преобразование Лапласа, можно получить изменение выходной величины по времени.

Пусть дифференциальное уравнение какого-либо элемента системы имеет вид

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x,$$

где
 y — выходная величина элемента системы;
 x — входное воздействие на элемент системы;
 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ — постоянные коэффициенты;
 n — порядок дифференциального уравнения элемента системы;
 m — порядок наивысшей производной входного воздействия.

Для физически реализуемых систем должно выполняться неравенство $m \leq n$.

Пусть в начальном положении (при $t=0$) система находилась в покое. Тогда соответствующее этому дифференциальному уравнению уравнение в изображениях будет иметь вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) X(p).$$

Передаточной функцией $K_3(p)$ элемента системы называется отношение преобразования Лапласа $Y(p)$ выходной величины к пре-

образованию Лапласа $X(p)$ входного воздействия при нулевых начальных условиях:

$$K_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Система управления может состоять из нескольких последовательно и параллельно соединенных элементов, описываемых соответствующими передаточными функциями.

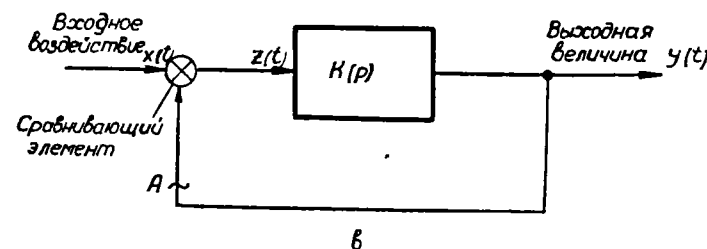
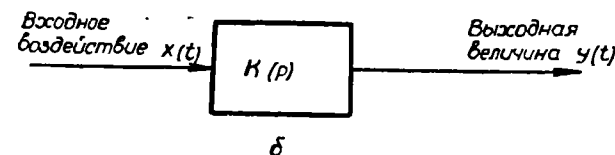
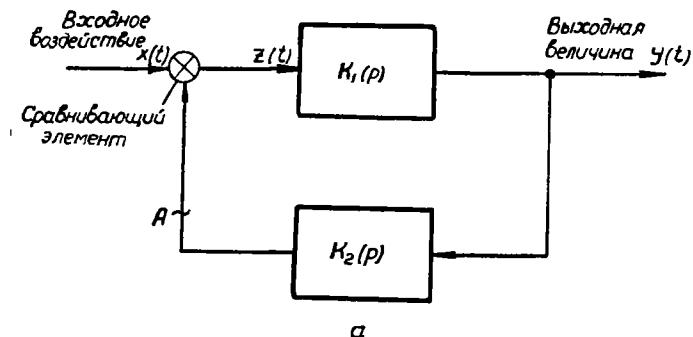


Рис. 2.1. Структурные схемы систем управления:

а — общий случай; б — случай разомкнутой системы; в — случай, когда выходная величина непосредственно сравнивается с входным воздействием

В общем случае при одном управляющем воздействии любого вида система управления может быть охарактеризована двумя передаточными функциями $K_1(p)$ и $K_2(p)$ (рис. 2.1, а). Уравнения систе-

мы, показанной на рис. 2.1, а, в изображениях запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} Y(p) &= K_1(p) Z(p) \\ Z(p) &= X(p) - K_2(p) Y(p) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где $X(p)$ — изображение входного воздействия системы;
 $Y(p)$ — изображение выходной величины системы;
 $Z(p)$ — изображение выходной величины сравнивающего элемента, равной разности поступающих на вход его воздействий;
 $K_1(p)$, $K_2(p)$ — передаточные функции составных частей системы.

Передаточной функцией $K_0(p)$ системы управления называется отношение преобразования Лапласа $Y(p)$ выходной величины системы к преобразованию Лапласа $X(p)$ входного воздействия на систему при нулевых начальных условиях.

Из уравнений (2.3) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y(p)}{X(p)} &= K_0(p) = \frac{K_1(p)}{1 + K(p)} \\ \frac{Z(p)}{X(p)} &= \frac{1}{1 + K(p)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где $K(p) = K_1(p) K_2(p)$.

Если выходная величина $y(t)$ не сравнивается каким-либо образом с входным воздействием $x(t)$, то система управления является разомкнутой. В этом случае (рис. 2.1, б) передаточная функция системы

$$K_0(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K(p). \quad (2.5)$$

Если систему управления, описываемую уравнением (2.3), разомкнуть в точке А (рис. 2.1, а), то передаточная функция разомкнутой петли системы будет равна $K(p)$.

Передаточную функцию системы можно выразить через передаточную функцию разомкнутой петли системы:

$$K_0(p) = \frac{K_1(p)}{1 + K(p)} = \frac{1}{K_2(p)} \frac{K(p)}{1 + K(p)}. \quad (2.6)$$

Если $K_2(p) = 1$, т. е. выходная величина системы непосредственно сравнивается с входным воздействием (рис. 2.1, в), то передаточная функция системы управления

$$K_0(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)}. \quad (2.7)$$

В этом случае $z(t) = x(t) - y(t)$ является рассогласованием системы, а $Z(p)$ — его изображением.

При анализе устойчивой системы управления обычно интересуются, является ли она статической или астатической. Устойчивая

система управления называется статической, если при воздействии, стремящемся к некоторому установившемуся постоянному значению, выходная величина сравнивающего элемента $z(t)$ стремится к постоянному значению.

Устойчивая система управления называется астатической, если при воздействии, стремящемся к некоторому установившемуся постоянному значению, выходная величина сравнивающего элемента $z(t)$ стремится к нулю.

Пользуясь выражением для изображения $Z(p)$, можно определить свойства передаточных функций разомкнутых петель статической и астатической систем.

Согласно определениям при

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c_1 \neq 0$$

система будет статической, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = c_2 \neq 0.$$

и астатической, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = c_2 = 0,$$

где c_1 и c_2 — постоянные величины.

Эти условия можно записать в изображениях Лапласа, воспользовавшись теоремой о конечном значении для функций, ограниченных и стремящихся к определенному пределу при $t \rightarrow \infty$, согласно которой

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p X(p) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p Z(p) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.8) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Z(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K(p)} X(p) p = \frac{1}{1 + K(0)} c_1 = c_2,$$

где $K(0) = [K(p)]_{p=0}$.

Отсюда следует, что для статических систем $K(0) = \text{const}$, а для астатических систем $K(0) = \infty$.

Таким образом, для того чтобы система управления являлась статической, передаточная функция $K(p)$ разомкнутой петли не должна иметь полюса при $p=0$, и для того чтобы система управления являлась астатической, передаточная функция разомкнутой петли должна иметь хотя бы один полюс при $p=0$.

Система управления называется астатической ν -го порядка, если при воздействии вида

$$x(t) = d_0 + d_1 t + \dots + d_\nu t^\nu$$

значение $z(t)$ стремится к постоянному значению

Передаточная функция $K(p)$ разомкнутой петли астатической ν -го порядка системы имеет полюс $p=0$ ν -й кратности.

Как указывалось выше, все методы анализа устойчивости основываются на одном и том же условии устойчивости: все корни характеристического уравнения системы должны лежать в левой полуплоскости.

Характеристическое уравнение системы может быть получено из выражения передаточной функции системы. Для этого знаменатель выражения (2.6) нужно приравнять нулю.

Пусть

$$K(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (2.9)$$

где $P(p)$ и $Q(p)$ — полиномы параметра p . Тогда характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$D(p) = P(p) + Q(p) = 0, \quad (2.10)$$

а характеристическое уравнение разомкнутой петли системы

$$Q(p) = 0. \quad (2.11)$$

Полиномы $D(p)$ и $Q(p)$ называют характеристическими функциями системы и ее разомкнутой петли.

Частотные методы анализа устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по частотным характеристикам системы или ее разомкнутой петли.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой петли системы определяются следующим соотношением:

$$K(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.12)$$

где $A(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика разомкнутой петли системы;

$\varphi(\omega)$ — фазовая частотная характеристика разомкнутой петли системы.

Частотную характеристику разомкнутой петли системы можно представить также в следующем виде:

$$K(j\omega) = R(\omega) + jS(\omega), \quad (2.13)$$

где $R(\omega)$ — вещественная частотная характеристика разомкнутой петли системы;

$S(\omega)$ — мнимая частотная характеристика разомкнутой петли системы.

Частотные характеристики $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $R(\omega)$ и $S(\omega)$ разомкнутой петли системы связаны между собой следующими соотношениями:

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + S^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{S(\omega)}{R(\omega)}.$$

Аналогичным образом можно определить частотные характеристики системы

$$K_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\varphi_0(\omega)}$$

или

$$K_0(j\omega) = R_0(\omega) + jS_0(\omega),$$

где $A_0(\omega)$, $\varphi_0(\omega)$, $R_0(\omega)$ и $S_0(\omega)$ — соответственно амплитудная, фазовая, вещественная и мнимая частотные характеристики системы.

Важным параметром, характеризующим систему управления, является резонансная частота ω_p системы, т. е. частота, при которой амплитудная частотная характеристика $A_0(\omega)$ имеет максимум. Резонансная частота ω_p обычно близка к частоте среза ω_c разомкнутой петли системы, т. е. частоте, при которой амплитудная частотная характеристика разомкнутой петли системы $A(\omega)$ равна единице.

б) Метод анализа устойчивости по соотношениям между коэффициентами характеристического уравнения системы

В основу рассматриваемых ниже методов анализа устойчивости может быть положен известный в теории функций комплексного переменного принцип аргумента.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы управления, записанное в следующем виде:

$$D(p) = P(p) + Q(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad (2.14)$$

где n — степень характеристического уравнения; c_0, c_1, \dots, c_n — постоянные коэффициенты.

Обозначим через p_1, p_2, \dots, p_n корни характеристического уравнения; тогда

$$D(p) = c_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n).$$

Положив $p = j\omega$, получим

$$D(j\omega) = c_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

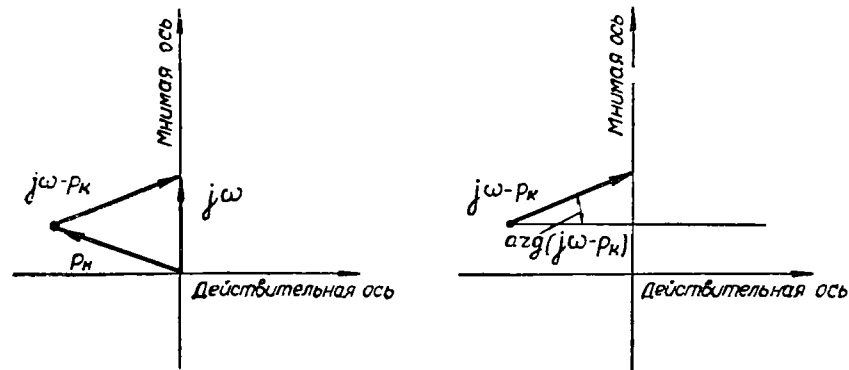
Аргумент этого выражения

$$\arg D(j\omega) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n).$$

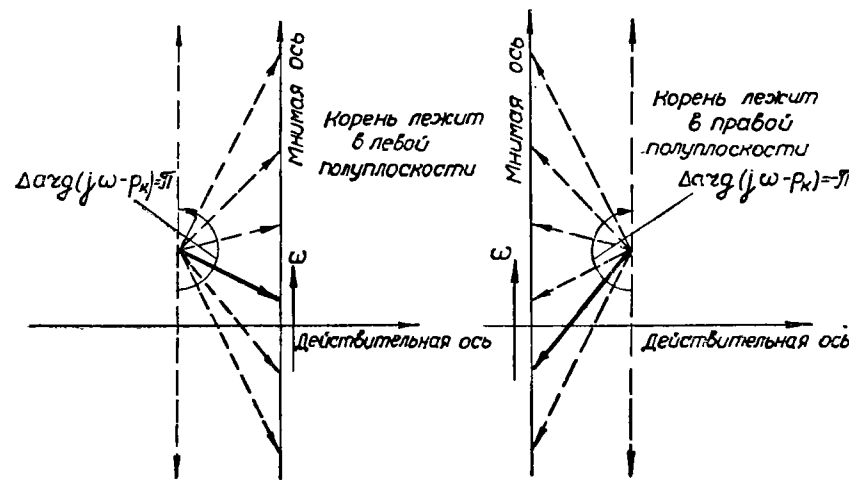
В комплексной плоскости величины $j\omega - pk$ можно представить в виде элементарных векторов, имеющих свои начала в точках, соответствующих корням pk , а концы — в одной точке $j\omega$ (рис. 2.2).

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор $j\omega - pk$ повернется на угол $+\pi$, если корень pk лежит в левой полуплоскости, и на угол $-\pi$, если корень pk лежит в правой части комплексной плоскости (рис. 2.2). При этом углам поворота векторов $j\omega - pk$ против часовой стрелки приписывается положительный знак.

Общее число корней характеристического уравнения равно n . Если число корней, лежащих в правой полуплоскости, равно m , то число корней, лежащих в левой полуплоскости, равно $n - m$.



Элементарный вектор $j\omega - p_k$... Аргумент элементарного вектора $\arg(j\omega - p_k)$



Приращение аргумента элементарного вектора $j\omega - p_k$

Рис. 2.2. К доказательству амплитудно-фазового критерия устойчивости

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ $\arg D(j\omega)$ получит приращение (рис. 2.2):

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - m) \pi - m \pi = (n - 2m) \pi.$$

Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы характеристическое уравнение системы не имело корней, лежащих в правой полуплоскости, т. е. чтобы выполнялось условие $m = 0$.

Следовательно, условие устойчивости может быть сформулировано в следующем виде: приращение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ должно равняться $n\pi$, где n — степень характеристического уравнения системы.

Критерий устойчивости Гурвица выражает указанное условие устойчивости в виде условий, накладываемых на соотношения между коэффициентами характеристического уравнения системы.

Приведем его формулировку.

Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $c_0 > 0$ определители Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ были положительными.

Определители Гурвица находятся через коэффициенты характеристического уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c_1 & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} & \Delta_4 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{vmatrix} \\ \Delta_n &= c_n \Delta_{n-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

В каждом i -м определителе по главной диагонали его выписываются коэффициенты от c_1 до c_i . Горизонтальные строки заполняются вправо от диагонали коэффициентами с убывающими индексами, а влево — коэффициентами с возрастающими индексами, причем все коэффициенты, индексы которых меньше нуля или больше n , заменяются нулями.

в) Метод частотных характеристик

Наиболее широко распространен метод, использующий частотные характеристики разомкнутой петли системы. Этот метод основывается на частотном критерии устойчивости Найквиста-Михайлова, который позволяет судить об устойчивости системы управления по годографу амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой петли системы, представляющему собой кривую, описываемую концом вектора $K(j\omega)$, на комплексной плоскости при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим передаточную функцию

$$W(p) = 1 + K(p) = 1 + \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p) + Q(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \quad (2.16)$$

где

$K(p)$ — передаточная функция разомкнутой петли системы;

$Q(p)$ и $P(p)$ — полиномы параметра p ;

$D(p) = P(p) + Q(p)$ — характеристическая функция системы;

$Q(p)$ — характеристическая функция разомкнутой петли системы.

Подставим в уравнение (2.16) $p=j\omega$ и рассмотрим приращение аргумента функции $1+K(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\Delta \arg [1+K(j\omega)] = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega).$$

Для устойчивой системы, как было показано выше:

$$\Delta \arg D(j\omega) = n\pi.$$

где n — степень характеристического уравнения системы.

Так как для реальных систем степень числителя передаточной функции разомкнутой петли системы $P(p)$ не может превосходить степени знаменателя $Q(p)$, то степень характеристического уравнения разомкнутой петли системы $Q(p)=0$, очевидно, совпадает со степенью характеристического уравнения системы $D(p)=0$.

Если при этом m_1 — число корней характеристического уравнения разомкнутой петли системы, лежащих в правой полуплоскости, то приращение аргумента

$$\Delta \arg Q(j\omega) = (n - 2m_1)\pi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta \arg [1+K(j\omega)] &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega) = \\ &= n\pi - (n - 2m_1)\pi = 2\pi m_1. \end{aligned}$$

Таким образом, для устойчивой системы вектор $W(j\omega) = 1+K(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ должен описать угол $2\pi m_1$, т. е. годограф вектора $W(j\omega)$ должен m_1 раз охватить начало координат в положительном направлении.

От годографа вектора $W(j\omega) = 1+K(j\omega)$ легко перейти к годографу вектора $K(j\omega)$, т. е. к амплитудно-фазовой характеристике $K(j\omega)$, которая представляет собой ту же кривую, что и годограф вектора $W(j\omega) = 1+K(j\omega)$, но сдвинутую по вещественной оси влево на единицу.

Так как годограф $K(j\omega)$ является симметричной кривой относительно вещественной оси, то можно рассматривать только одну половину годографа, соответствующую изменению ω от 0 до $+\infty$.

На основании изложенного приходим к следующей формулировке критерия устойчивости.

Система управления будет устойчивой, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой петли при изменении ω от 0 до $+\infty$ охватывает точку $(-1, j0)$ в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{m_1}{2}$ раз, где m_1 — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости (рис. 2.3).

Для практического применения удобнее использовать несколько иную формулировку критерия устойчивости, которая позволяет избежать непосредственного подсчета числа изменения аргумента.

Система управления будет устойчивой, если при изменении ω от 0 до $+\infty$ разность между числом положительных и отрицательных

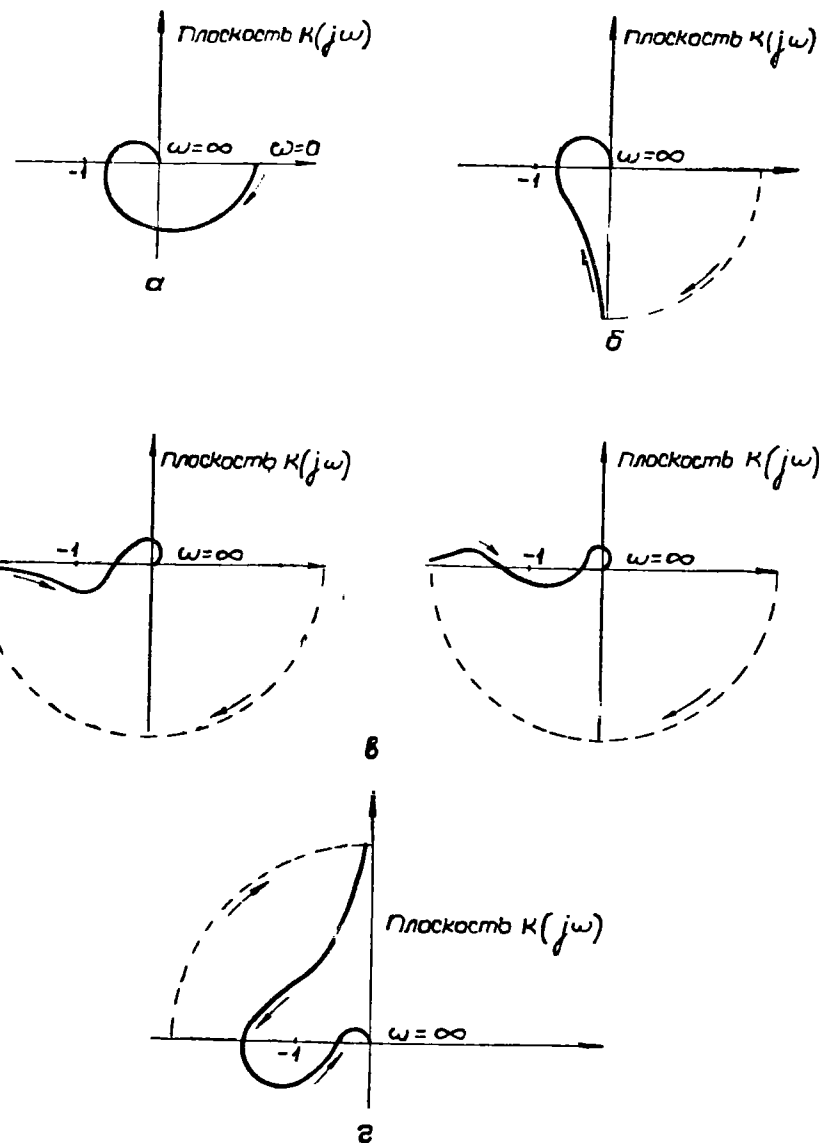


Рис. 2.3. Примеры амплитудно-фазовых частотных характеристик разомкнутых петель устойчивых систем:

а — статическая система, разомкнутая петля которой устойчива ($m_1=0$); б — астатическая система с астатизмом первого порядка, разомкнутая петля которой устойчива ($m_1=0$); в — астатическая система с астатизмом второго порядка, разомкнутые петли которых устойчивы ($m_1=0$); г — астатическая система с астатизмом первого порядка, разомкнутая петля которой неустойчива ($m_1=1$)

переходов (под положительным переходом понимается переход с верхней полуплоскости в нижнюю) амплитудно-фазовой частотной характеристики отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$ равна $\frac{m_1}{2}$, где m_1 — число корней с положительной вещественной частью характеристического уравнения разомкнутой петли системы (рис. 2.3). (В случае, когда амплитудно-фазовая частотная характеристика исходит из отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$, не пересекая его, переход принимается равным $1/2$.)

Передаточные функции разомкнутых петель астатических систем имеют корни, равные нулю, поэтому вид амплитудно-фазовой частотной характеристики при $\omega=0$ становится неопределенным. Для того чтобы освободиться от этой неопределенности, предполагают, что при построении амплитудно-фазовой частотной характеристики аргумент p изменяется вдоль мнимой оси, деформированной так, чтобы обойти полюс $p=0$ вдоль полуокружности весьма малого радиуса в направлении, обратном движению часовой стрелки, что соответствует изменению амплитудно-фазовой характеристики по дуге бесконечно большого радиуса, изображенной на рис. 2.3 пунктиром.

Применяя критерии устойчивости к анализу астатических систем, необходимо учитывать указанный вид амплитудно-фазовых частотных характеристик.

Построение амплитудно-фазовых частотных характеристик сложных систем, состоящих из большого числа звеньев, требует значительной затраты времени. Исследование устойчивости значительно упрощается, если ввести в рассмотрение логарифмические частотные характеристики:

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |K(j\omega)| = 20 \lg A(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \arg K(j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где $L(\omega)$ — логарифмическая амплитудная частотная характеристика;

$\varphi(\omega)$ — фазовая частотная характеристика.

Критерий устойчивости применительно к логарифмическим частотным характеристикам можно сформулировать следующим образом.

Система управления будет устойчивой, если разность числа положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ через прямую -180° [под положительным переходом понимается переход через -180° в сторону увеличения $\varphi(\omega)$] для значений ω , при которых логарифмическая амплитудная характеристика $L(\omega)$ положительна, равна $\frac{m_1}{2}$, где m_1 — число корней характеристического

уравнения разомкнутой петли системы с положительной действительной частью (рис. 2.4).

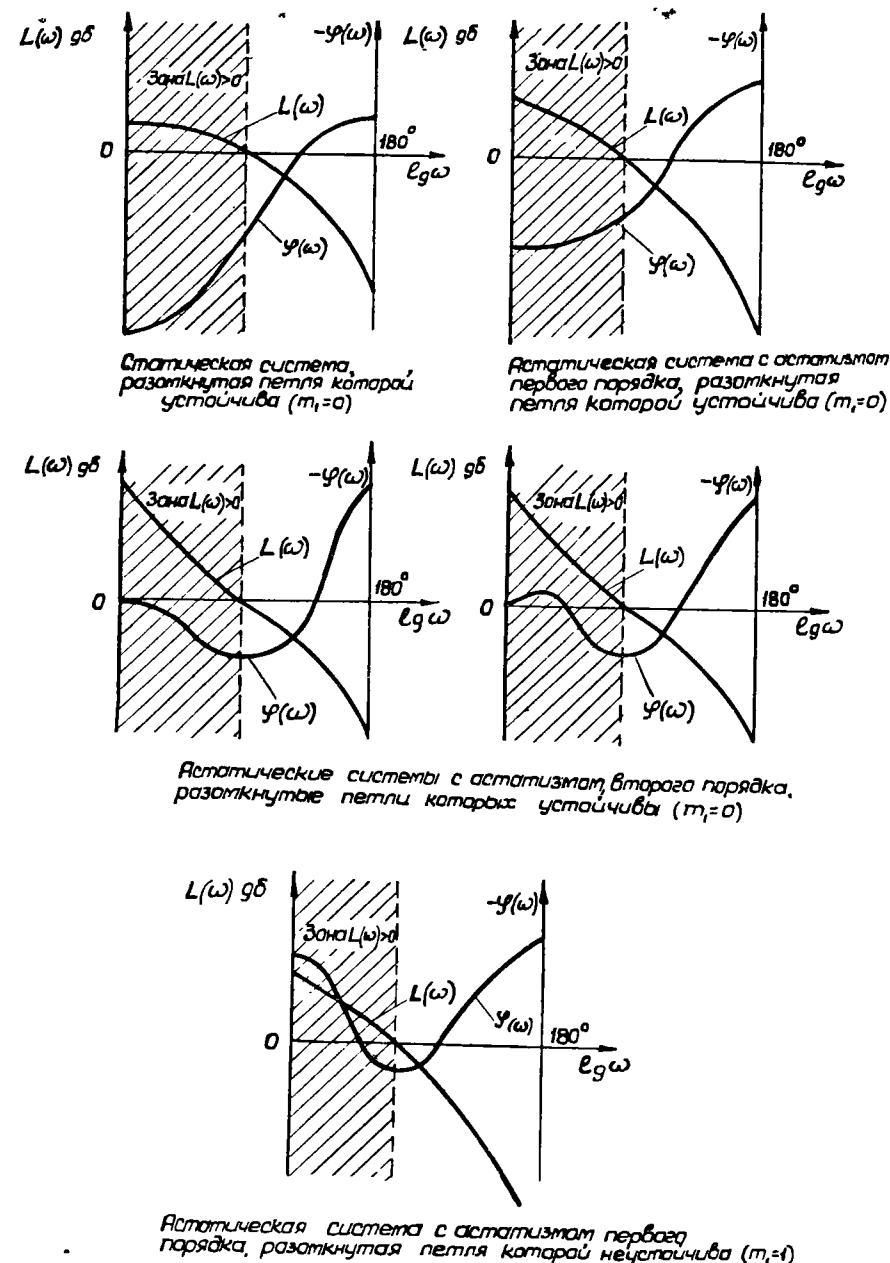


Рис. 2.4. Примеры логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик разомкнутых петель устойчивых систем

При применении этого критерия к астатическим системам следует учитывать вид амплитудно-фазовых характеристик их разомкнутых петель в районе частоты $\omega=0$.

Приведенные на рис. 2.4 логарифмические частотные характеристики разомкнутых петель устойчивых систем соответствуют амплитудно-фазовым частотным характеристикам, изображенным на рис. 2.3.

Критерий устойчивости системы в том случае, когда разомкнутая петля системы устойчива, может быть сформулирован следующим образом.

Система, разомкнутая петля которой устойчива, будет устойчива, если число положительных и число отрицательных переходов фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ через прямую -180° для значений ω , при которых логарифмическая амплитудная характеристика $L(\omega)$ положительна, равны (рис. 2.4).

Если передаточная функция $K(p)$ разомкнутой петли системы состоит из простых сомножителей, то вопрос о том, является ли разомкнутая петля системы устойчивой или неустойчивой и сколько в последнем случае характеристическое уравнение имеет корней в правой полуплоскости, решается весьма просто.

Если в системе управления звенья или элементы ее соединяются так, что выход каждого звена или элемента является входом только следующего звена или элемента, то такая система называется однопетлевой (одноконтурной). В противном случае ее называют многопетлевой (многоконтурной).

Многопетлевые системы, так же как и однопетлевые, могут быть в общем случае представлены структурной схемой рис. 2.1, а. Однако при подобном представлении вид передаточной функции разомкнутой петли оказывается иногда весьма сложным, и не представляется возможным непосредственно судить об устойчивости разомкнутой петли.

В этом случае рациональнее вести анализ устойчивости путем непосредственного рассмотрения многопетлевой системы.

Для определения устойчивости многопетлевой системы можно поступить следующим образом. Полностью разомкнуть все петли и определить число m_1 корней с положительной вещественной частью характеристического уравнения части системы, связывающей входное воздействие с выходной величиной. Затем построить логарифмические амплитудные и частотные характеристики систем, получающихся при последовательном произвольном замыкании каждой петли, за исключением какой-либо одной из них.

При этом многопетлевая система управления будет устойчивой, если для положительных значений соответствующих логарифмических амплитудных частотных характеристик разность между числом положительных и отрицательных пересечений прямой -180° всеми фазовыми частотными характеристиками, получаемыми при последовательном включении каждой петли, равна $\frac{m_1}{2}$.

Устойчивая система управления должна иметь определенные запасы устойчивости. Обычно запасы устойчивости системы характеризуются двумя величинами: запасом устойчивости по модулю и запасом устойчивости по фазе.

Запасом устойчивости по модулю называется наименьшее число, показывающее, во сколько раз необходимо увеличить или уменьшить коэффициент усиления разомкнутой петли системы для того, чтобы система стала неустойчивой.

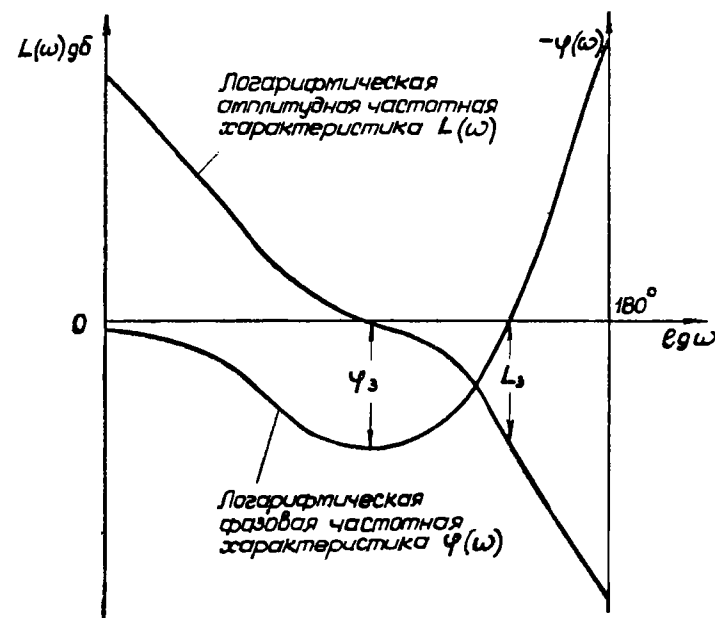


Рис. 2.5. Запасы устойчивости системы управления

Запасом устойчивости по фазе называется величина фазового сдвига, который необходимо ввести на частоте среза в разомкнутую петлю системы для того, чтобы система стала неустойчивой.

Следует отметить, что система может стать неустойчивой при изменении коэффициента усиления, меньшем запаса устойчивости по модулю, и при изменении фазового сдвига, меньшем запаса устойчивости по фазе. Это может иметь место, если изменение коэффициента усиления и фазового сдвига производится одновременно.

Если значение $L(\omega)$ при значении $\varphi(\omega)$, меньшем -180° , не имеет минимума для частот, меньших частоты среза, и не имеет максимума для частот, больших частоты среза, то запасы устойчивости определяются, как видно из рис. 2.5, следующим образом.

Запас устойчивости по модулю L_3 определяется абсолютным значением $L(\omega)$ на частоте, где $\varphi(\omega) = -180^\circ$.

Запас устойчивости по фазе φ_3 определяется абсолютной величиной отклонения значения $\varphi(\omega)$ от -180° на частоте, где $L(\omega) = 0$.

Если запас устойчивости системы по модулю или по фазе равен нулю, то она находится на границе устойчивости.

Параметры систем управления обычно стремятся выбрать таким образом, чтобы запасы устойчивости удовлетворяли следующим условиям:

$$L_3 \geq 6 \div 8 \text{ дБ};$$

$$\varphi_3 \geq 30 \div 35^\circ.$$

При построении логарифмических частотных характеристик используются следующие единицы:

— декада или октава — по оси $\lg \omega$ (декада соответствует десятикратному изменению частоты, а октава — двукратному);

— децибел — по оси $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ (20 дБ соответствуют значению амплитудной частотной характеристики $A(\omega)$, равному 10);

— градус — по оси $\varphi(\omega)$.

Благодаря возможности использования специальных шаблонов и номограмм метод построения логарифмических частотных характеристик нашел широкое применение как для анализа, так и для синтеза систем управления. Для упрощения построения необходимо пользоваться следующими методами построения и свойствами логарифмических частотных характеристик.

1) Если передаточная функция какой-либо части системы $K(p)$ представляет собой произведение передаточных функций отдельных звеньев $K_1(p), K_2(p), \dots, K_k(p), \dots, K_m(p)$, так что $K(p) = K_1(p)K_2(p) \dots K_k(p) \dots K_m(p)$, то логарифмические амплитудная $L(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ частотные характеристики могут быть получены суммированием характеристик отдельных звеньев, т. е.

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_k(\omega) + \dots + L_m(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_k(\omega) + \dots + \varphi_m(\omega),$$

где $L_k(\omega)$ и $\varphi_k(\omega)$ — логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики k -го звена.

2) Логарифмические амплитудная $L_0(\omega)$ и фазовая $\varphi_0(\omega)$ частотные характеристики системы с передаточной функцией $K_0(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)}$ определяются по логарифмическим амплитудной $L(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотным характеристикам разомкнутой петли системы с передаточной функцией $K(p)$ с помощью номограмм.

3) Если передаточная функция какой-либо части системы представляет собой сумму двух передаточных функций отдельных звеньев

$$K(p) = K_1(p) + K_2(p),$$

то амплитудная и фазовая частотные характеристики могут быть получены следующим образом.

Представим передаточную функцию $K(p)$ в виде

1

π

φ

ракте-
будут

$L_3(\omega)$

отные
 $K(p)$,

более
емени

стери-

стики

эцнсс
 $L(\omega)$

57

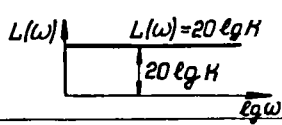
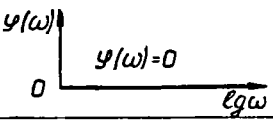
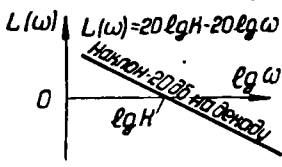
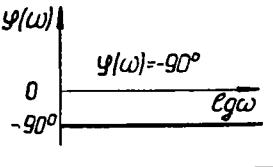
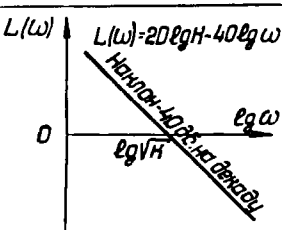
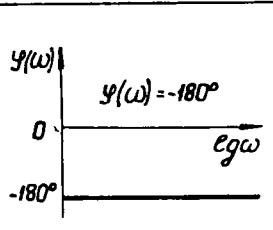
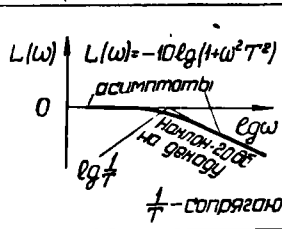
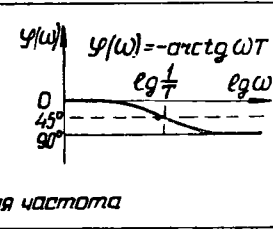
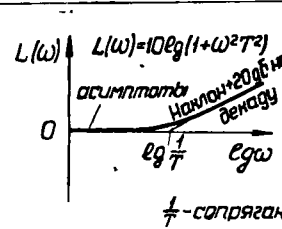
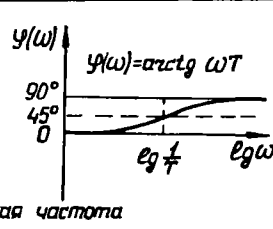
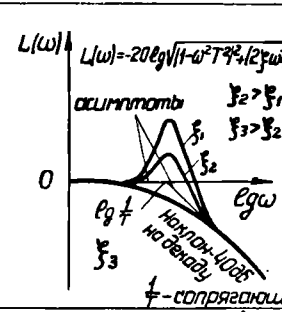
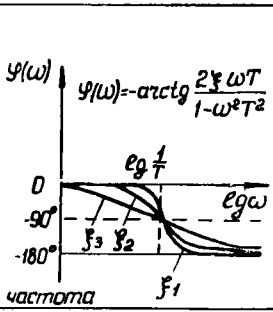
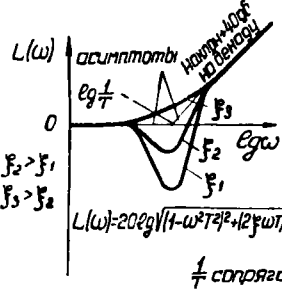
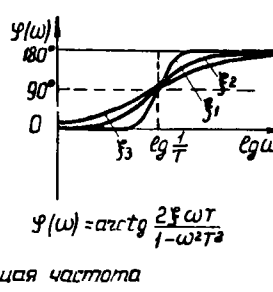
Тип звена	Передающая функция	Логарифмические частотные характеристики		Примечание
		Амплитудная	Фазовая	
Усилительное	K K - коэффициент усиления			
Интегрирующее первого порядка	$\frac{K}{p}$ K - коэффициент усиления			
Интегрирующее второго порядка	$\frac{K}{p^2}$ K - коэффициент усиления			
Инерционное (апериодическое)	$\frac{1}{1+Tp}$ T - постоянная времени			Логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L(\omega)$ строится в асимптотах с последующим введением поправки с помощью шаблона. Логарифмическая фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$ строится с помощью шаблона. Поправка к $L(\omega)$ и фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ не зависят от постоянной времени T . Логарифмические амплитудные и фазовые характеристики инерционного дифференцирующего первого порядка звена симметричны относительно оси $lg \omega$.
Дифференцирующее первого порядка	$1+Tp$ T - постоянная времени			
Колесательное	$\frac{1}{1+2\zeta Tp+T^2 p^2}$ T - постоянная времени ζ - коэффициент демпфирования			Логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L(\omega)$ строится в асимптотах с последующим введением поправки с помощью шаблона. Логарифмическая фазовая частотная характеристика строится с помощью шаблона. Поправка к $L(\omega)$ и фазовая характеристика зависят от коэффициента демпфирования ζ . Логарифмические амплитудные и фазовые характеристики колебательного и дифференцирующего второго порядка звена симметричны относительно оси $lg \omega$.
Дифференцирующее второго порядка	$1+2\zeta Tp+T^2 p^2$ T - постоянная времени ζ - коэффициент демпфирования			

Рис. 2.6. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев

Запас устойчивости по фазе φ , определяется абсолютной величиной отклонения значения $\varphi(\omega)$ от -180° на частоте где $L(\omega) = 0$

Если за нулю, то он
Парамет
образом, ч
условиям:

При по
используют
— декад
тикратному
— деци
значению а
— град

Благода
и номограм
ристик наш
теза систе
пользовать
рифмически

1) Если
представля
звеньев $K_1(p)$
... $K_k(p)$...
 $\varphi(\omega)$ част
нием харак

и L
 φ

где $L_k(\omega)$
стотные ха

2) Лог
ные харак
 $K(p)$

$= \frac{1 + K(p)}{1 + K(p)}$
фазовой φ
мы с перед

3) Если
ставляет со

то амплит
получены

Представим передаточную функцию $K(p)$ в виде

$$K(p) = K_1(p) \left[1 + \frac{K_2(p)}{K_1(p)} \right] = K_1(p) \frac{1 + \frac{K_2(p)}{K_1(p)}}{1 + \frac{K_2(p)}{K_1(p)}} = \frac{K_1(p)}{K_4(p)}$$

где

$$K_4(p) = \frac{K_3(p)}{1 + K_3(p)}$$

$$K_3(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p)}$$

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики звена, соответствующего передаточной функции $K_3(p)$, будут

$$L_3(\omega) = L_1(\omega) - L_2(\omega);$$

$$\varphi_3(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega).$$

С помощью номограммы $L_4(\omega)$ и $\varphi_4(\omega)$ определяются по $L_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$.

Логарифмические амплитудная $L(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $K(p)$, тогда будут

$$L(\omega) = L_1(\omega) - L_4(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_4(\omega).$$

4) Вид логарифмических частотных характеристик наиболее часто встречающихся звеньев не зависит от постоянных времени звеньев.

На рис. 2.6 приведены логарифмические частотные характеристики типовых звеньев и указаны особенности их построения.

Покажем сформулированное выше свойство на примере.

Для звена с передаточной функцией

$$K(p) = 1 + Tp$$

логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики будут соответственно

$$L(\omega) = 20 \lg |1 + j\omega T| = 10 \lg (1 + T^2 \omega^2) =$$

$$= 10 \lg \left[1 + \text{anti lg } 2 \left(\lg \omega - \lg \frac{1}{T} \right) \right];$$

$$\varphi(\omega) = \arg(1 + j\omega T) = \arctg \omega T =$$

$$= \arctg \left[\text{anti lg} \left(\lg \omega - \lg \frac{1}{T} \right) \right].$$

Из выражений для $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ видно, что если по оси абсцисс откладывать $\lg \omega$, то для различных значений T характеристики $L(\omega)$

и $\varphi(\omega)$ будут иметь один и тот же вид, так как изменение T приводит к параллельному смещению $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ вдоль оси $\lg \omega$.

Для построения $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ рассматриваемого звена пользуются шаблонами, на которых нанесены кривые

$$L_0(\omega) = 20 \lg |1 + j\omega| = 10 \lg (1 + \omega^2)$$

$$\varphi_0(\omega) = \arg (1 - j\omega) = \arctg \omega$$

в зависимости от $\lg \omega$. Перемещая шаблон вдоль оси $\lg \omega$, точку шаблона, соответствующую $\lg \omega = 0$, ставят на точку оси $\lg \omega$, в которой $\lg \omega = \lg \frac{1}{T}$.

5) Если передаточная функция какой-либо части системы представляет собой произведение передаточных функций типовых звеньев, то построение логарифмических частотных характеристик целесообразно производить следующим образом:

а) определяются сопрягающие частоты отдельных звеньев (рис. 2.6), которые отмечаются на оси $\lg \omega$;

б) по сопрягающим частотам строится логарифмическая амплитудная частотная характеристика в асимптотах; после каждой из сопрягающих частот наклон характеристики $L(\omega)$ изменяется по сравнению с тем наклоном, который она имела до рассматриваемой сопрягающей частоты, в зависимости от того, какому звену эта сопрягающая частота соответствует; наклон изменяется на -20 дБ на декаду в случае апериодического звена, на -40 дБ на декаду в случае колебательного звена, на $+20$ дБ на декаду в случае дифференцирующего звена первого порядка и на $+40$ дБ на декаду в случае дифференцирующего звена второго порядка;

в) при помощи шаблонов для поправок уточняется вид полученной логарифмической амплитудной частотной характеристики;

г) логарифмические фазовые частотные характеристики отдельных звеньев строятся при помощи шаблонов; суммированием их ординат получается логарифмическая фазовая частотная характеристика системы.

Построение логарифмических частотных характеристик производится обычно на миллиметровой бумаге. Для построения поправок к логарифмическим амплитудным характеристикам и фазовых характеристик используются шаблоны, изготовленные из прозрачного материала.

Перечисленные методы построения и свойства логарифмических частотных характеристик позволяют довольно просто производить их построение даже для весьма сложных многопетлевых систем.

г) Метод построения областей устойчивости

Методы анализа устойчивости, указанные выше, позволяют выяснить, устойчива ли система, если все ее параметры заданы. Однако часто вопрос ставится иначе: заданы все параметры системы,

кроме одного (или нескольких), и требуется определить, при каких значениях этого параметра (или нескольких параметров) система устойчива.

Поставленная таким образом задача может быть решена с помощью критерия Гурвица и метода логарифмических частотных характеристик. Однако решение задачи этими методами в большинстве случаев является громоздким, требующим сложных расчетов и построений. Наиболее рациональным является построение областей устойчивости в плоскости параметров (D-разбиение плоскости параметров).

Рассмотрим методику построения областей устойчивости в плоскости одного параметра и в плоскости двух параметров.

1) Построение областей устойчивости в плоскости одного параметра. Пусть необходимо выяснить влияние на устойчивость системы только одного параметра C . Характеристическое уравнение системы в этом случае можно записать в следующем виде:

$$1 + K(p, C) = 0,$$

где $K(p, C)$ — передаточная функция разомкнутой петли системы.

Если разрешить это уравнение относительно параметра C так, что

$$C = K_1(p),$$

то, подставляя в правую часть этого уравнения $p = j\omega$, получим

$$C = K_1(j\omega) = R_1(\omega) + jS_1(\omega).$$

Задавая различные значения ω , можно начертить в комплексной плоскости C кривую $K_1(j\omega)$, которую заштриховывают слева.

Вычерченная кривая отображает на комплексную плоскость C мнимую ось $j\omega$ комплексной плоскости p корней характеристического уравнения системы.

При движении в плоскости p по мнимой оси от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ область корней характеристического уравнения системы с отрицательными вещественными частями остается слева, т. е. изменению знака вещественной части корня характеристического уравнения системы с положительного на отрицательный при изменении величины C соответствует переход его через мнимую ось плоскости p справа налево.

Поэтому переход через кривую $K_1(j\omega)$ в плоскости C с незаштрихованной стороны на заштрихованную сторону соответствует в плоскости корней p переходу корня с правой полуплоскости в левую.

Областью, соответствующей наибольшему числу корней характеристического уравнения системы, будет та часть плоскости C , которая ограничена кривой, имеющей штриховку, направленную только внутрь этой области (рис. 2.7). В этом случае, если имеется диапазон значений C , при которых система устойчива, область, ограниченная кривой, имеющей штриховку, направленную только внутрь нее,

будет областью устойчивости системы. Кривая, ограничивающая область устойчивости, называется границей области устойчивости.

Так как параметр C может принимать только действительные значения, то необходимо рассматривать только те значения C , которые лежат в области устойчивости на вещественной оси (рис. 2.7).

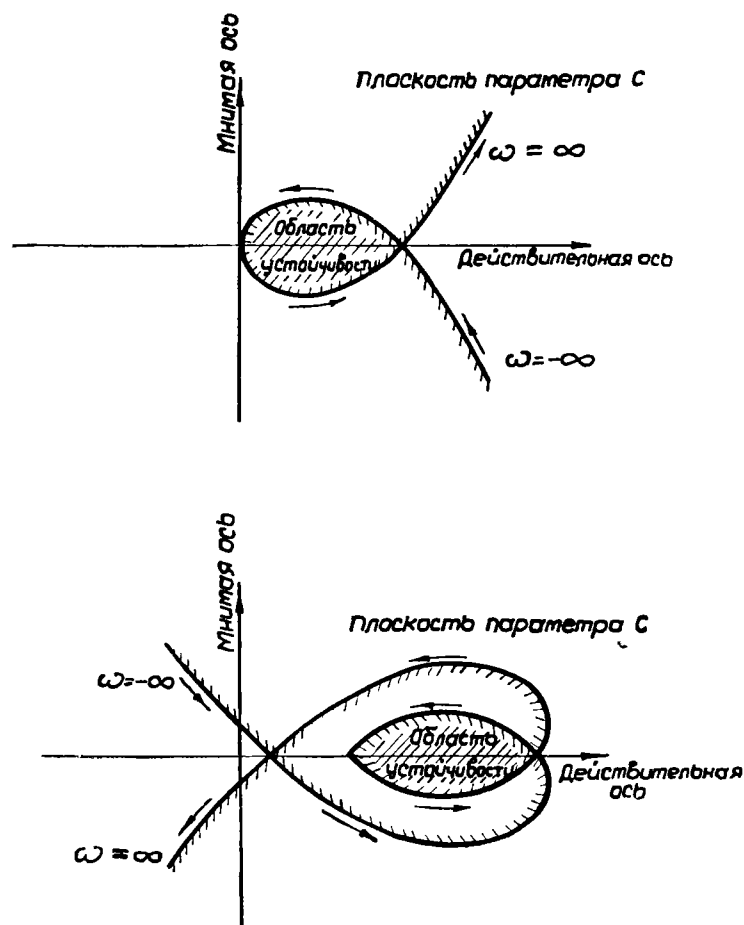


Рис. 2.7. Примеры выделения областей устойчивости в плоскости одного параметра

Построение кривой $R_1(\omega) + jS_1(\omega)$ можно производить путем построения логарифмических частотных характеристик, соответствующих передаточной функции $K_1(p)$, или путем непосредственного вычисления функций $R_1(\omega)$ и $S_1(\omega)$.

2) Построение областей устойчивости в плоскости двух параметров. Пусть необходимо выявить влияние на устойчивость системы двух параметров C_1 и C_2 . Характеристи-

ческое уравнение системы в этом случае можно записать в следующем виде:

$$1 + K(p, C_1, C_2) = 0, \quad (2.18)$$

где $K(p, C_1, C_2)$ — передаточная функция разомкнутой петли системы.

Подставляя в это уравнение $p = j\omega$ и отделяя вещественную часть от мнимой, получаем два уравнения:

$$\begin{cases} f_1(\omega, C_1, C_2) = 0 \\ f_2(\omega, C_1, C_2) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.19) можно получить зависимость параметров C_1 и C_2 от ω :

$$\begin{cases} C_1 = C_1(\omega) \\ C_2 = C_2(\omega) \end{cases} \quad (2.20)$$

Задавая различные значения ω , можно начертить в плоскости параметров C_1 и C_2 кривую, отображающую в этой плоскости мнимую ось ($p = j\omega$) комплексной плоскости p .

Параметры C_1 и C_2 в зависимости от ω могут быть получены только для тех ω , при которых якобиан

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C_1} & \frac{\partial f_1}{\partial C_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial C_1} & \frac{\partial f_2}{\partial C_2} \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

отличен от нуля. Если при каком-либо $\omega = \omega_0$ $\Delta = 0$, то это свидетельствует о том, что одно из уравнений (2.19) является следствием другого. В этом случае для параметров C_1 и C_2 при частоте $\omega = \omega_0$ получается бесконечная совокупность точек, удовлетворяющих обоим уравнениям (2.19).

Эта бесконечная совокупность точек или кривая в плоскости параметров C_1 и C_2 определяется уравнением

$$f_1(\omega_0, C_1, C_2) = 0$$

или уравнением

$$f_2(\omega_0, C_1, C_2) = 0$$

и называется особой кривой.

Очень часто особой кривой соответствуют частоты $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = \infty$. Точка пересечения особой кривой с кривой, определяемой уравнениями (2.20), называется исключительной точкой.

Для определения области устойчивости в плоскости параметров C_1 и C_2 Неймарком был предложен способ штриховки, который приведем без доказательства.

Пусть C_1 откладывается по оси абсцисс, а C_2 — по оси ординат. Если при движении по границе области в сторону возрастания ω

(т. е. от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$) определитель Δ положителен, то кривую штрихуют слева. Если при том же направлении движения определитель Δ отрицателен, то кривую штрихуют справа. При этом кривая может быть заштрихована один раз или дважды в зависимости от того, происходит ли движение вдоль нее один или два раза.

Особую кривую штрихуют так, чтобы вблизи исключительной точки штрихи особой кривой и кривой, построенной по уравнениям (2.20), были направлены в одну и ту же сторону. Если при движении по кривой, определяемой уравнениями (2.20), при переходе через исключительную точку определитель не меняет знака, особую кривую не штрихуют. В этом случае, если имеется диапазон значений C_1 и C_2 , при которых система устойчива, при указанном способе штриховки областью устойчивости будет та часть плоскости параметров C_1 и C_2 , которая ограничена кривыми, имеющими штриховку, направленную только внутрь этой области (рис. 2.8).

Построение кривой $C_1 = C_1(\omega)$, $C_2 = C_2(\omega)$ можно в некоторых случаях упростить. Если передаточную функцию разомкнутой петли системы $K(p, C_1, C_2)$ можно разбить на произведение двух передаточных функций, одна из которых $K_1(p)$ не зависит от параметров C_1 и C_2 , а другая $K_2(p, C_1, C_2)$ зависит, т. е. если

$$K(p, C_1, C_2) = K_1(p) K_2(p, C_1, C_2),$$

то характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$1 + K_1(p) K_2(p, C_1, C_2) = 0$$

или

$$\frac{1}{K_1(p)} + K_2(p, C_1, C_2) = 0.$$

Уравнения для параметров C_1 и C_2 в зависимости от ω будут

$$\left. \begin{aligned} R_2(\omega) + \varphi_1(\omega, C_1, C_2) &= 0 \\ S_2(\omega) + \varphi_2(\omega, C_1, C_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где $R_2(\omega)$ и $S_2(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $\frac{1}{K_1(p)}$;

$\varphi_1(\omega, C_1, C_2)$ и $\varphi_2(\omega, C_1, C_2)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $K_2(p, C_1, C_2)$.

В этом случае выражения для $\varphi_1(\omega, C_1, C_2)$ и $\varphi_2(\omega, C_1, C_2)$ будут проще, чем для $f_1(\omega, C_1, C_2)$ и $f_2(\omega, C_1, C_2)$, а следовательно, решение уравнений (2.22) для C_1 и C_2 будет также проще. Кроме того, вычисление $R_2(\omega)$ и $S_2(\omega)$ можно производить путем построения логарифмических частотных характеристик, соответствующих передаточной функции $\frac{1}{K_1(p)}$.

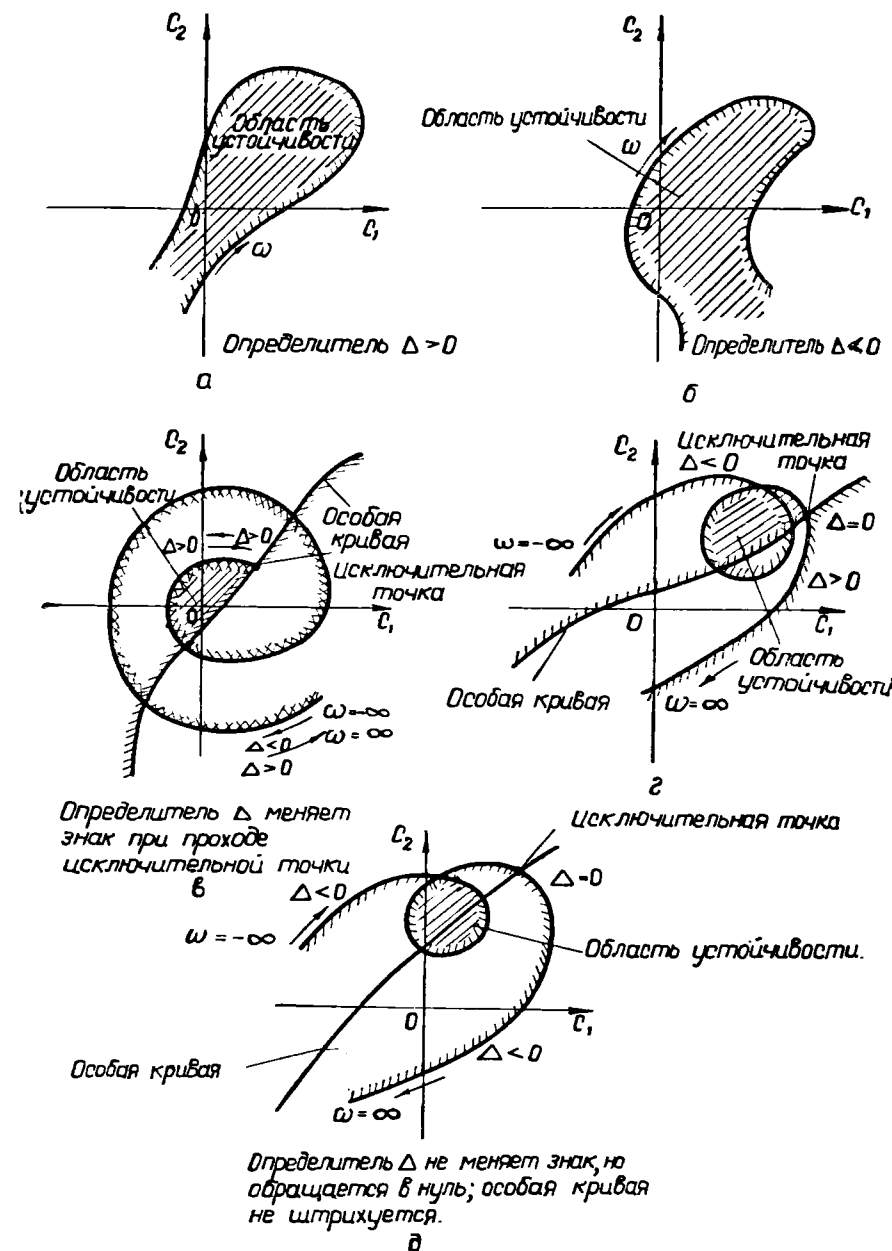


Рис. 2.8. Примеры выделения областей устойчивости в плоскости двух параметров

Для определения направления штриховки и получения особых кривых в указанном случае необходимо пользоваться определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial C_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial C_2} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial C_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial C_2} \end{vmatrix}.$$

Как будет показано ниже, применение метода построения областей устойчивости позволяет довольно просто учитывать при анализе устойчивости нелинейность какого-либо элемента системы, если принимать в качестве одного из параметров C_1 или C_2 коэффициент усиления нелинейного элемента по первой гармонике.

2. Импульсные системы

а) Основные понятия

Импульсной системой управления называют такую систему управления, которая содержит в качестве одного из элементов импульсный элемент.

Импульсный элемент преобразует непрерывно изменяющееся входное воздействие в периодическую последовательность прямоугольных импульсов, параметры (высота или длительность) которых зависят от значения входного воздействия в моменты возникновения импульсов.

Величину T_0 , определяющую время между моментами возникновения импульсов, называют периодом чередования (или повторения).

Отношение длительности импульса к периоду чередования называют скважностью и обозначают через γ ($0 < \gamma \leq 1$).

Обычно различают два основных типа импульсных элементов. Импульсный элемент первого типа преобразует входное воздействие в последовательность импульсов, высота которых пропорциональна значениям входного воздействия в моменты возникновения импульсов (амплитудно-импульсная модуляция). Импульсный элемент второго типа преобразует входное воздействие в последовательность импульсов, длительность которых пропорциональна значениям входного воздействия в моменты возникновения импульсов (широотно-импульсная модуляция).

Преобразование входного воздействия в импульсных элементах первого и второго типа представлено на рис. 2.9. В дальнейшем будут рассматриваться системы с импульсными элементами только первого типа, хотя все полученные результаты могут быть распространены и на системы с импульсными элементами второго типа.

Математическим аппаратом исследования систем импульсного управления является дискретное преобразование Лапласа, оперирующее со ступенчатыми функциями.

Ступенчатой функцией называется функция, значение которой изменяется только при дискретных, равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной. Ступенчатую функцию обозначают через

$$x[nT_0],$$

где T_0 — величина, определяющая расстояние между соседними дискретными значениями независимой переменной;

n — целое число.

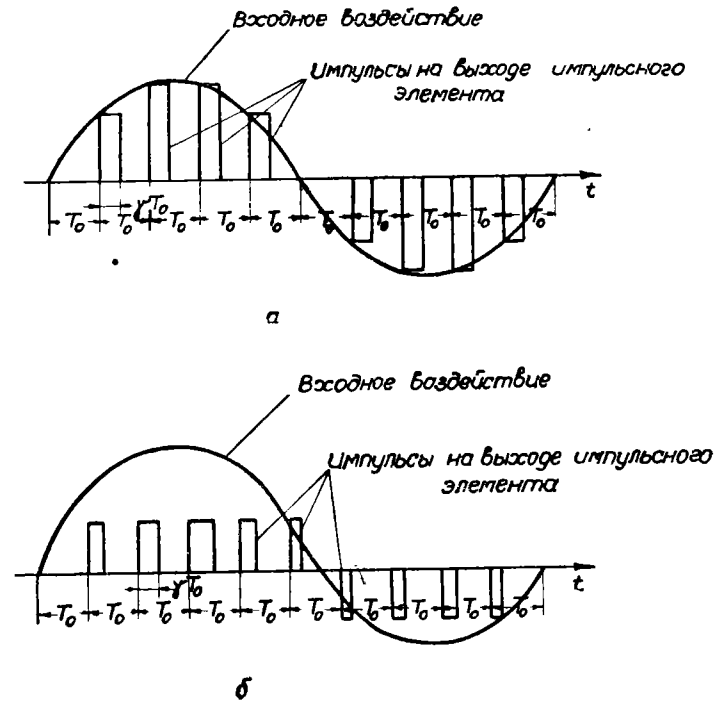


Рис. 2.9. Преобразование входного воздействия в импульсных элементах первого и второго типа:

а — первый тип импульсного элемента (амплитудно-импульсная модуляция);
б — второй тип импульсного элемента (широотно-импульсная модуляция)

Пусть задана некоторая функция $x(t)$. Проводя через ординаты этой функции, соответствующие дискретным равноотстоящим значениям независимой переменной $t = nT_0$, отрезки прямых, параллельных оси абсцисс, получим геометрическое изображение, соответствующее ступенчатой функции $x[nT_0]$ (рис. 2.10).

Часто оказывается удобным, чтобы расстояние между дискретными значениями независимой переменной было равным единице. Для этой цели в $x(t)$ производится замена независимой переменной $t = T_0 \bar{t}$.

Ступенчатая функция, соответствующая $x(\bar{t})$, будет равна $x[n]$.

Дискретным преобразованием Лапласа или изображением функции $x[n]$ называется функция $X^*(q)$ комплексного переменного q :

$$X^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-qn}. \quad (2.23)$$

Символически изображение записывают следующим образом:

$$X^*(q) = D\{x[n]\}.$$

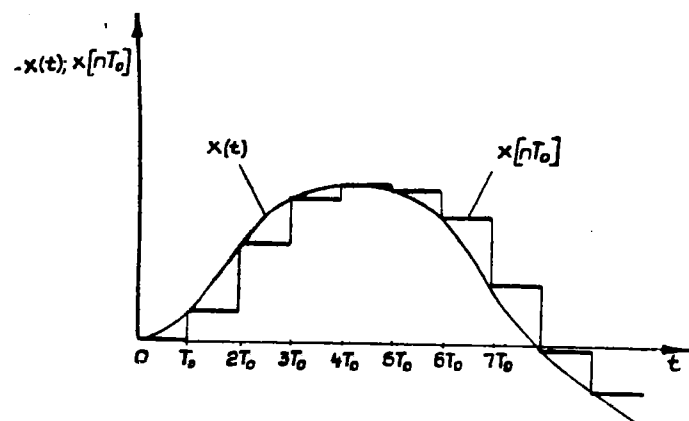


Рис. 2.10. Образование ступенчатой функции из непрерывной функции

Так же как и обычное преобразование Лапласа, дискретное преобразование применимо для функций, удовлетворяющих условию

$$x[n] = 0 \text{ при } n < 0,$$

в том случае, когда можно выбрать такое вещественное число c_0 , что при всех $c > c_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]| e^{-cn} < \infty.$$

Величина c_0 называется абсциссой абсолютной сходимости.

Обратное дискретное преобразование Лапласа позволяет определить ступенчатую функцию $x[n]$ по изображению $X^*(q)$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} X^*(q) e^{qn} dq, \quad (2.24)$$

где c — число, большее абсциссы абсолютной сходимости c_0 .

При исследовании импульсных систем управления рассматривают значения переменных величин системы в дискретные моменты времени, расположенные через период чередования импульсов T_0 и сдвинутые относительно моментов возникновения импульсов на время Δt ($\Delta t < T_0$). Этим значениям соответствуют ступенчатые функции, которые параметрически зависят от относительного времени сдвига $\epsilon = \frac{\Delta t}{T_0}$.

Применение дискретного преобразования Лапласа к полученным таким образом ступенчатым функциям дает возможность представлять дифференциальные уравнения переменных величин импульсной системы управления в виде алгебраических уравнений изображений соответствующих ступенчатых функций, зависящих от ϵ .

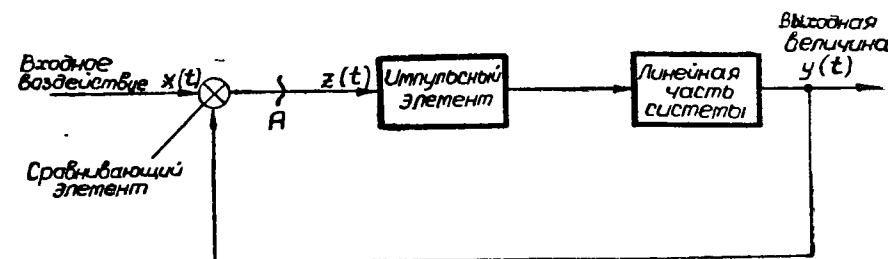


Рис. 2.11. Структурная схема импульсной системы управления

Решая алгебраические уравнения, можно получить изображение ступенчатой функции выходной величины системы в зависимости от изображения ступенчатой функции входного воздействия, коэффициентов дифференциальных уравнений и ϵ . Применяя к изображению ступенчатой функции выходной величины обратное дискретное преобразование Лапласа, получим дискретные значения (ступенчатую функцию) выходной величины в зависимости от ϵ , т. е. изменение выходной величины по времени:

$$t = (n + \epsilon)T_0 = nT_0 + \Delta t.$$

Импульсную систему управления можно всегда представить в виде двух частей: импульсного элемента и линейной части системы (рис. 2.11).

В дальнейшем будем предполагать, что воздействие на систему приложено ко входу импульсного элемента. Это не является ограничением, так как воздействия, приложенные к любой точке линейной части, можно всегда привести (пересчитать) ко входу импульсного элемента.

Разомкнем систему на входе импульсного элемента (в точке A) и составим уравнение разомкнутой петли системы.

Пусть переменная величина на входе импульсного элемента равна $z(t)$; тогда на выходе его возникает последовательность импульсов

с периодом чередования T_0 , высота которых изменяется по закону $k_n z[nT_0]$, где n — целое число, а k_n — коэффициент усиления импульсного элемента (равный отношению высоты импульса к значению переменной величины на входе импульсного элемента). Эта последовательность импульсов воздействует на линейную часть системы.

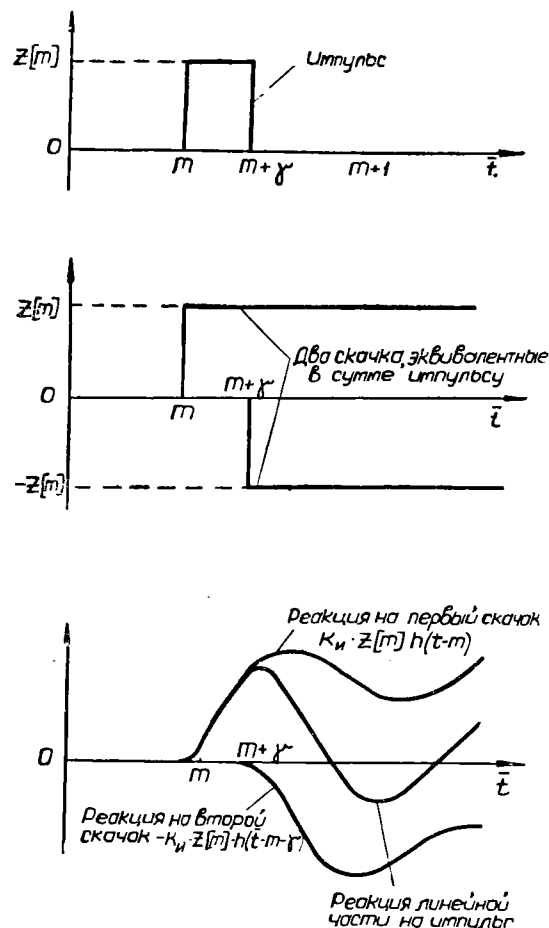


Рис. 2.12. Реакция линейной части системы на импульс

Если обозначить через $h(\bar{t})$ переходную характеристику (реакцию линейной части системы на единичный скачок, поданный в момент времени $\bar{t}=0$, где относительное время $\bar{t} = \frac{t}{T_0}$), то реакция линейной части на импульс, поданный в момент $\bar{t}=m$, будет (рис. 2.12):

$$k_n z[m] h(\bar{t} - m) \text{ при } m \leq \bar{t} < m + \gamma;$$

$$k_n z[m] \{h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma)\} \text{ при } \bar{t} \geq m + \gamma,$$

где $z[m]$ — значение переменной величины на входе импульсного элемента в момент времени $\bar{t}=m$;

γ — скважность импульса или относительная длительность импульса.

Первое выражение соответствует процессу в интервале времени внутри импульса, второе — вне его.

Реакция линейной части системы на всю последовательность импульсов, т. е. значение выходной величины, будет

$$y(\bar{t}) = k_n \sum_{m=0}^{n-1} z[m] \{h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma)\} + k_n z[n] h(\bar{t} - n)$$

$$\text{при } n \leq \bar{t} < n + \gamma;$$

$$y(\bar{t}) = k_n \sum_{m=0}^n z[m] \{h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma)\} \text{ при } n + \gamma \leq \bar{t} < n + 1.$$

Положим в этих выражениях

$$\bar{t} = \frac{t}{T_0} = n + \frac{\Delta t}{T_0} = n + \epsilon,$$

где Δt — время, отсчитываемое от начала каждого импульса;
 $\epsilon = \frac{\Delta t}{T_0}$ — относительная его величина, изменяющаяся в интервале от нуля до единицы.

Тогда будем иметь

$$y(n + \epsilon) = k_n \sum_{m=0}^{n-1} z[m] \{h(n - m + \epsilon) - h(n - m + \epsilon - \gamma)\} + k_n z[n] h(\epsilon) \text{ при } n \leq n + \epsilon < n + \gamma;$$

$$y(n + \epsilon) = k_n \sum_{m=0}^n z[m] \{h(n - m + \epsilon) - h(n - m + \epsilon - \gamma)\} \text{ при } n + \gamma \leq n + \epsilon < n + 1.$$

Эти выражения связывают (при заданном ϵ) дискретные значения переменных величин системы. Дискретным значениям этих

величин соответствуют ступенчатые функции $y[n, \varepsilon]$, имеющие параметрическую зависимость от ε . При этом получим

$$\left. \begin{aligned} y[n, \varepsilon] &= k_n \sum_{m=0}^n z[m] \{h[n-m, \varepsilon] - h[n-m, \varepsilon, \gamma]\} \\ &\quad \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma \\ y[n, \varepsilon] &= k_n \sum_{m=0}^n z[m] \{h[n-m, \varepsilon] - h[n-m, \varepsilon, \gamma]\} \\ &\quad \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Штрих у суммы первого выражения означает, что при $m=n$ $h[0, \varepsilon] - h[0, \varepsilon, \gamma]$ следует заменить на $h[0, \varepsilon]$.

Ступенчатую функцию $z[m]$ можно трактовать как входное воздействие, а ступенчатую функцию $y[n, \varepsilon]$ — как выходную величину разомкнутой петли импульсной системы.

Передающей функцией разомкнутой петли импульсной системы называют отношение дискретного преобразования Лапласа $Y^*(q, \varepsilon)$ выходной величины к дискретному преобразованию Лапласа $Z^*(q)$ входного воздействия при нулевых начальных условиях.

Подвергая обе части выражений (2.25) дискретному преобразованию Лапласа и пользуясь теоремой об умножении изображений, получаем уравнение разомкнутой петли системы в изображениях

$$\left. \begin{aligned} Y^*(q, \varepsilon) &= K_I^*(q, \varepsilon) Z^*(q) \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma \\ Y^*(q, \varepsilon) &= K_{II}^*(q, \varepsilon) Z^*(q) \quad \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где $K_I^*(q, \varepsilon)$ и $K_{II}^*(q, \varepsilon)$ — передаточные функции разомкнутой петли импульсной системы.

Передающие функции $K_I^*(q, \varepsilon)$ и $K_{II}^*(q, \varepsilon)$ равны:

$$K_I^*(q, \varepsilon) = D \{k_n (h[n, \varepsilon] - h[n, \varepsilon, \gamma])\} \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma, \quad (2.27)$$

причем здесь $h[0, \varepsilon] - h[0, \varepsilon, \gamma]$ следует заменить на $h[0, \varepsilon]$;

$$K_{II}^*(q, \varepsilon) = D \{k_n (h[n, \varepsilon] - h[n, \varepsilon, \gamma])\} \quad \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \quad (2.28)$$

Передающие функции разомкнутой импульсной системы, как видно из выражений (2.27) и (2.28), определяются с помощью дискретного преобразования ступенчатых функций, полученных из непрерывной функции $h(t)$. Функция $h(t)$ представляет собой реакцию линейной части системы на единичный скачок в момент времени $t=0$ и может быть получена путем обычного обратного преобразования Лапласа через передаточную функцию линейной части системы.

Пусть передаточная функция линейной части системы

$$K_L(p) = \frac{P_L(p)}{Q_L(p)}.$$

Приведем выражение для передаточных функций разомкнутой импульсной петли системы через передаточную функцию ее линейной части. Для этого в передаточной функции $K_L(p)$ заменим p на $\frac{q}{T_0}$. Полученную таким образом передаточную функцию запишем в виде

$$K(q) = \frac{P(q)}{Q(q)}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Все полюсы функции $K(q)$ — простые и ненулевые. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} K_I^*(q, \varepsilon) &= k_n [c_{0,0} + \sum_{v=1}^l c_{v,0} \frac{e^q - e^{q_v(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon}] \\ K_{II}^*(q, \varepsilon) &= k_n \sum_{v=1}^l c_{v,0} \frac{(1 - e^{-q_v \gamma}) e^q}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

где q_v — корни уравнения $Q(q) = 0$, или, что то же самое, полюсы функции $K(q)$;

l — число корней уравнения $Q(q) = 0$;

$$c_{v,0} = \frac{P(q_v)}{Q'(q_v) q_v}; \quad c_{0,0} = \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

2) Один полюс функции $K(q)$ — нулевой простой. Все другие полюсы тоже простые. В этом случае

$$K(q) = \frac{P(q)}{Q(q)} = \frac{P(q)}{Q_1(q) q},$$

где $Q_1(q) = 0$ не имеет нулевого корня.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} K_I^*(q, \varepsilon) &= k_n \left[c_{0,0} + c_{0,1} \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{e^q - 1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{l-1} c_{v,0} \frac{e^q - e^{q_v(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon} \right] \\ K_{II}^*(q, \varepsilon) &= k_n \left[c_{0,1} \frac{\gamma e^q}{e^q - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{l-1} c_{v,0} \frac{(1 - e^{-q_v \gamma}) e^q}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где q_v — ненулевые корни уравнения $Q(q) = 0$ или корни уравнения $Q_1(q) = 0$;

l — число корней уравнения $Q(q)=0$;

$$c_{0,0} = \left[\frac{d}{dq} \frac{P(q)}{Q_1(q)} \right]_{q=0}; \quad c_{0,1} = \frac{P(0)}{Q_1(0)}; \quad c_{v,0} = \frac{P(q_v)}{Q'(q_v) q_v}.$$

3) Нулевой полюс функции $K(q)$ — двойной. Все другие полюсы простые. В этом случае

$$K(q) = \frac{P(q)}{Q(q)} = \frac{P(q)}{Q_1(q) q^2},$$

где $Q_1(q)=0$ не имеет нулевого корня.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} K_I^*(q, \varepsilon) &= k_n \left[c_{0,0} + c_{0,1} \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{e^q - 1} \right) + \right. \\ &+ \frac{c_{0,2}}{2!} \left(\varepsilon^2 + \frac{2\gamma(\varepsilon + 1) - \gamma^2}{e^q - 1} + \frac{2\gamma}{(e^q - 1)^2} \right) + \\ &+ \sum_{v=1}^{l-2} c_{v,0} \frac{e^q - e^{q_v(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon} \left. \right] \\ K_{II}^*(q, \varepsilon) &= k_n \left[c_{0,1} \frac{\gamma e^q}{e^q - 1} + \right. \\ &+ \frac{c_{0,2}}{2!} \left(\frac{2\varepsilon - \gamma - \gamma e^q}{e^q - 1} + \frac{2\gamma e^q}{(e^q - 1)^2} \right) + \\ &+ \sum_{v=1}^{l-2} c_{v,0} \frac{(1 - e^{q_v \gamma}) e^q}{e^q - e^{q_v}} e^{q_v \varepsilon} \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

где q_v — ненулевые корни уравнения $Q(q)=0$ или корни уравнения $Q_1(q)=0$;

l — число корней уравнения $Q(q)=0$;

$$c_{0,0} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dq^2} \frac{P(q)}{Q_1(q)} \right]_{q=0}; \quad c_{0,1} = \left[\frac{d}{dq} \frac{P(q)}{Q_1(q)} \right]_{q=0};$$

$$c_{0,2} = \frac{P(0)}{Q_1(0)}; \quad c_{v,0} = \frac{P(q_v)}{Q'(q_v) q_v}.$$

Уравнения импульсной системы управления (рис. 2.11) в изображениях можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} Y^*(q, \varepsilon) &= K_i(q, \varepsilon) Z^*(q) \\ Z^*(q) &= X^*(q) - Y^*(q, 0) \\ Y^*(q, 0) &= K_I(q, 0) Z^*(q) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

где $X^*(q) = D\{X[n]\}$;
 $i=I$ при $0 \leq \varepsilon < \gamma$;
 $i=II$ при $\gamma \leq \varepsilon < 1$.

Первое из этих уравнений определяет связь между выходной величиной системы и переменной величиной на входе импульсного элемента в моменты возникновения импульсов. Второе уравнение выражает зависимость переменной величины на входе импульсного элемента в моменты возникновения импульсов от воздействия на систему и выходной величины, значения которой определяются третьим уравнением, в те же моменты времени.

Передаточной функцией $K_I^*(q, \varepsilon)$ импульсной системы управления называется отношение дискретного преобразования Лапласа $Y^*(q, \varepsilon)$ выходной величины к дискретному преобразованию Лапласа $X^*(q)$ входного воздействия на систему при нулевых начальных условиях.

Из уравнений (2.32) получаем

$$K_{0i}^*(q, \varepsilon) = \frac{Y^*(q, \varepsilon)}{X^*(q)} = \frac{K_i^*(q, \varepsilon)}{1 + K_I^*(q, 0)}, \quad (2.33)$$

где

$$i=I \text{ при } 0 \leq \varepsilon < \gamma;$$

$$i=II \text{ при } \gamma \leq \varepsilon < 1.$$

Передаточную функцию $K_I^*(q, 0)$ обозначают обыкновенно через $K^*(q, 0)$. В этом обозначении передаточная функция импульсной системы будет иметь вид

$$K_{0i}^*(q, \varepsilon) = \frac{K_i^*(q, \varepsilon)}{1 + K^*(q, 0)}. \quad (2.34)$$

б) Методы анализа устойчивости

Импульсная система управления, так же как и линейная система с постоянными коэффициентами, устойчива в том случае, если все полюсы передаточной функции системы имеют отрицательные действительные части.

Передаточная функция импульсной системы является функцией e^q , т. е. представляет собой периодическую функцию от $\omega = Im(q)$ с периодом 2π . Вследствие периодичности можно рассматривать передаточную функцию в полосе $-\pi < \omega \leq \pi$.

Таким образом, для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все полюсы передаточной функции системы располагались в левой части полосы $-\pi < Im(q) \leq \pi$ комплексной плоскости q .

Для доказательства критерия устойчивости рассмотрим передаточную функцию $1 + K^*(q, 0)$.

Нули этой функции совпадают с полюсами передаточной функции системы $K_{0i}^*(q, \varepsilon)$. Следовательно, система будет устойчива, если все нули $1 + K^*(q, 0)$ лежат в левой части полосы $-\pi < Im(q) \leq \pi$.

Выберем на плоскости q контур L , лежащий в правой части полосы (рис. 2.13) и образованный отрезком L_1 мнимой оси, границами этой полосы L_2 и L_3 и отрезком L_4 бесконечно удаленной прямой, параллельной мнимой оси.

Предположим, что на этом контуре нет нулей и полюсов функции $1+K^*(q, 0)$. Тогда на основании принципа аргумента изменение аргумента функции $1+K^*(q, 0)$ при изменении q вдоль контура в отрицательном направлении, т. е. так, чтобы область, ограниченная контуром L , лежала с правой стороны, будет равно -2π , помноженному на разность между числом нулей и числом полюсов, лежащих в области, ограниченной контуром L , т. е.

$$\Delta_L \arg [1+K^*(q, 0)] = -2\pi(n_0 - m_0),$$

где n_0 — число нулей функции $1+K^*(q, 0)$ в области, ограниченной контуром L ;

m_0 — число полюсов функции $1+K^*(q, 0)$ в этой же области.

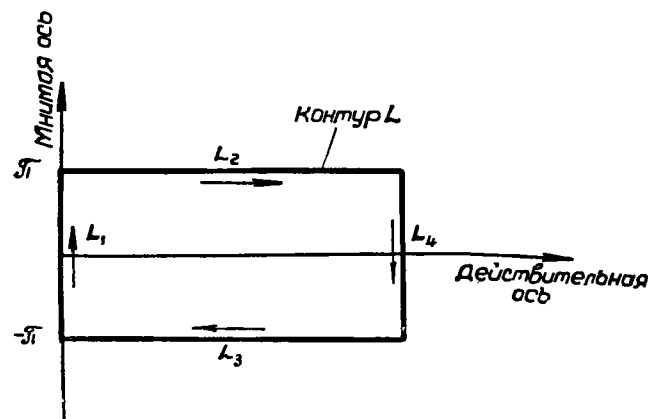


Рис. 2.13. Контур L . К доказательству критерия устойчивости импульсной системы управления

Полюсы функции $1+K^*(q, 0)$ совпадают с полюсами передаточной функции петли разомкнутой системы $K_t^*(q, \epsilon)$, а следовательно, с полюсами передаточной функции линейной части $K(q)$.

Если линейная часть системы устойчива, то $m_0=0$. В этом случае для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы в области, ограниченной контуром L , отсутствовали нули функции $1+K^*(q, 0)$, т. е. чтобы $n_0=0$.

Таким образом, импульсная система управления будет устойчивой, если будет выполнено условие $\Delta_L \arg [1+K^*(q, 0)] = 0$.

При изменении q вдоль прямых L_2 и L_3 $1+K^*(q, 0)$ будет изменяться вдоль действительной оси, так как значения $1+K^*(\sigma + j\pi, 0)$ и $1+K^*(\sigma - j\pi, 0)$ вследствие периодичности $K^*(\sigma + j\omega, 0)$ по ω равны, а следовательно, и вещественны.

Значение q на бесконечно удаленной прямой L_4 равно $+\infty$. Таким образом, изменение q вдоль этой прямой будет соответствовать точке на вещественной оси, равной $1+K^*(+\infty, 0)$.

Отсюда следует, что изменение аргумента $\Delta_L \arg [1+K^*(q, 0)]$ вдоль замкнутого контура L целиком определяется изменением аргумента только вдоль отрезка прямой L_1 .

Когда q изменяется вдоль мнимой оси ($q=j\omega$) от $-j\pi$ до $+j\pi$, т. е. вдоль отрезка L_1 , то $1+K^*(q, 0)$ будет описывать некоторую замкнутую кривую $1+K^*(j\omega, 0)$.

Изменение аргумента равно числу оборотов вектора $1+K^*(j\omega, 0)$. Это изменение аргумента будет равно нулю лишь в том случае, если кривая $1+K^*(j\omega, 0)$ не будет охватывать начала координат.

Если рассматривать не вектор $1+K^*(j\omega, 0)$, а вектор $K^*(j\omega, 0)$, то можно сформулировать критерий устойчивости следующим образом.

Для того чтобы импульсная система управления была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика $K^*(j\omega, 0)$ при изменении ω от $-\pi$ до $+\pi$ не охватывала точки $(-1, j0)$.

При анализе устойчивости импульсных систем обычно применяют два метода:

1) метод построения частотной характеристики $K^*(j\omega, 0)$;

2) метод построения областей устойчивости в плоскости двух параметров.

Построение частотных характеристик производится непосредственным вычислением действительной и мнимой частей частотной характеристики $K^*(j\omega, 0)$.

Метод построения областей устойчивости одинаков как для импульсных систем, так и для линейных систем. Разница состоит лишь в том, что для импульсных систем рассматривается изменение аргумента ω от $-\pi$ до $+\pi$ вместо изменения ω от $-\infty$ до $+\infty$ для линейных систем.

Следует отметить, что в случае, когда период колебаний в системе T_p значительно превосходит период чередования импульсов T_0 , например, когда $T_p > (6-8)T_0$, и скважность импульсов $\gamma=1$, анализ устойчивости импульсной системы можно производить так же, как и для линейной системы. В этом случае импульсный элемент можно заменить элементом с запаздыванием, равным $\frac{1}{2}T_0$. В самом деле,

если на импульсный элемент подать синусоидальное воздействие $x(t)$, то его выходная величина $x[nT_0]$ будет ступенчатой функцией; при этом если на период воздействия приходится достаточное количество ступеней, то среднее значение выходной величины $\bar{x}(t)$ импульсного элемента будет иметь амплитуду, близкую к амплитуде воздействия, умноженной на коэффициент усиления импульсного элемента, и будет запаздывать относительно воздействия на время $\frac{T_0}{2}$

(рис. 2.14).

Передаточная функция разомкнутой петли импульсной системы в этом случае может быть записана в следующем виде:

$$K^*(p) = k_n e^{-\frac{pT_0}{2}} K_n(p), \quad (2.35)$$

где $K_n(p)$ — передаточная функция линейной части системы.

Для исследования устойчивости импульсных систем управления, содержащих нелинейные элементы, может быть применен метод анализа устойчивости нелинейных систем, излагаемый ниже.

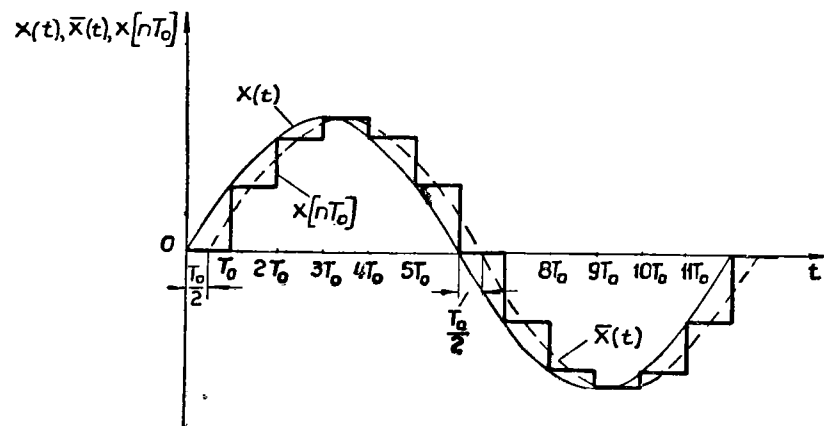


Рис. 2.14. Среднее значение выходного параметра импульсного элемента при малом периоде чередования импульсов

3. Нелинейные системы

Методы анализа устойчивости, изложенные выше, могут быть применены только к линейным системам управления или к системам, практически близким к линейным. В ряде случаев необходимо учитывать нелинейности некоторых элементов системы, существенным образом влияющие на ее характеристики.

В системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (нелинейных системах), обнаруживаются существенно новые явления, которые могут не наблюдаться в линейных системах.

Устойчивость линейной системы не зависит от приложенного к ней воздействия. В то же время нелинейная система при малых воздействиях может быть, например, устойчива, а при больших воздействиях неустойчива.

Для линейной системы, не находящейся на границе устойчивости, после приложения и последующего снятия ограниченного воздействия возможны лишь два типа движения, при одном из которых отклонения всех переменных величин системы асимптотически стремятся к постоянному значению или к нулю (система устойчива), а при другом неограниченно возрастают (система неустойчива).

В нелинейной системе возможно значительно большее многообразие типов движений. Очень часто встречающимся типом движения являются автоколебания, представляющие собой периодическое движение, возникающее не вследствие наличия внешних по отношению к системе периодических воздействий, а вследствие собственных свойств системы.

Задачами анализа устойчивости нелинейных систем являются:

- 1) анализ влияния параметров системы на ее устойчивость и оценка воздействий, при которых система может стать неустойчивой;
- 2) определение возможных режимов автоколебаний и оценка воздействий, при которых автоколебания могут возникнуть; анализ влияния параметров системы на характеристики автоколебаний.

Методы анализа устойчивости нелинейных систем можно разделить на точные и приближенные.

Точные методы основываются на использовании фазового пространства и при современном состоянии развития теории автоматического регулирования позволяют производить анализ лишь для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями не выше второго или третьего порядка. К этим методам относятся метод фазовой плоскости и метод точечных преобразований.

Приближенные методы, принимаемые для определения периодических режимов, могут быть разбиты на две группы.

Методы первой группы основываются на предположении, что возникающие в системе периодические колебания на входе нелинейных элементов близки по форме к синусоидальным.

Методы второй группы основываются на том, что возникающие в системе периодические колебания близки к синусоидальным по форме и что частота этих колебаний либо равна порождающей частоте (частоте колебаний линейной части системы), либо отличается от нее на малую величину.

Методы второй группы охватывают более узкий класс задач, чем методы первой группы.

В данном разделе рассматривается только метод первой группы — метод гармонического баланса.

Идея метода гармонического баланса заключается в следующем.

Пусть в нелинейной системе возникли периодические колебания какой-либо частоты ω . Тогда переменная величина на входе нелинейного элемента будет также изменяться периодически с частотой ω . Предположим, что колебания этой величины на входе нелинейного элемента близки к гармоническим (основной составляющей их является первая гармоника); в этом случае задача определения колебаний может быть решена на основе рассмотрения гармонического баланса в системе, т. е. баланса по амплитуде и фазе только первой гармоники колебаний. Действительно, производить баланс по амплитуде и фазе более высоких гармоник, возникающих на выходе нелинейного элемента, в этом случае нет никакой необходимости, так как порождаемые нелинейным элементом более высокие гармоники согласно предположению на входе этого элемента малы.

Нелинейную систему, имеющую один нелинейный элемент, можно представить в виде двух частей: нелинейного элемента и линейной части системы (рис. 2.15).

Предположение о практическом отсутствии на входе нелинейного элемента гармоник выше первой является правильным в следующих случаях:

1) Амплитудная характеристика линейной части системы на какой-либо частоте ω_{\max} имеет большой и острый максимум. В этом случае колебания в системе могут возникать на частоте, близкой к частоте ω_{\max} . По сравнению с амплитудой колебаний частоты ω_{\max} амплитуды более высоких гармоник ее на входе нелинейного элемента будут значительно ослаблены.

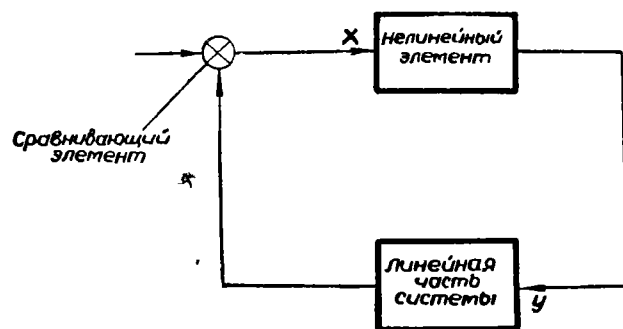


Рис. 2.15. Структурная схема нелинейной системы управления

2) Амплитудная характеристика линейной части системы имеет явно выраженную полосу пропускания в спектре низких частот и, начиная с некоторой частоты, мало отличается от нуля. Если частота первой гармоники лежит левее этой частоты, а частота остальных гармоник — правее ее, то амплитуды остальных гармоник, порождаемых нелинейным элементом, при прохождении через линейную часть системы будут сильно уменьшаться и на входе нелинейного элемента практически отсутствовать.

3) Характеристика нелинейного элемента не приводит практически к возникновению более высоких гармоник, чем первая.

При выполнении одного или частичном выполнении нескольких указанных условий вполне оправдано применение метода гармонического баланса. Метод гармонического баланса может быть применен и в ряде других случаев, когда не выполняются указанные условия, например в случае, когда нелинейный элемент является элементом релейного типа, и гармоники выше первой на входе его таковы, что не приводят к изменению фазы колебаний на выходе нелинейного элемента.

Рассмотрим прохождение гармонического воздействия через нелинейный элемент.

Пусть характеристика нелинейного элемента определяется выражением

$$y = \Psi(x), \quad (2.36)$$

где x — воздействие на входе нелинейного элемента;

y — выходная величина нелинейного элемента.

Для простоты будем предполагать, что при изменении x по синусоидальному закону среднее значение y за период равно нулю.

Пусть на вход нелинейного элемента подано синусоидальное воздействие x амплитуды A и частоты ω ; тогда выходная величина нелинейного элемента будет периодической функцией той же частоты и в общем случае будет содержать спектр гармонических составляющих.

При применении метода гармонического баланса не учитывается влияние высших гармоник переменной величины y на выходе нелинейного элемента; поэтому в уравнении (2.36) переменную величину y можно заменить ее первой гармоникой:

$$y = A \{R(A) \sin \omega t + S(A) \cos \omega t\}. \quad (2.37)$$

Величины $AR(A)$ и $AS(A)$ в этом выражении определяются как коэффициенты первой гармоники ряда Фурье:

$$AR(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Psi(A \sin \omega t) \sin \omega t dt;$$

$$AS(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Psi(A \sin \omega t) \cos \omega t dt$$

или

$$\left. \begin{aligned} R(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Psi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ S(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Psi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где $\psi = \omega t$.

Величину

$$K_n(A) = R(A) + jS(A) \quad (2.39)$$

называют эквивалентным комплексным коэффициентом усиления. Годограф $K_n(A)$ при изменении амплитуды A в пределах от нуля до бесконечности представляет собой амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента.

Модуль эквивалентного комплексного коэффициента усиления

$$\sqrt{R^2(A) + S^2(A)}$$

показывает, во сколько раз амплитуда первой гармоники переменной величины на выходе нелинейного элемента больше амплитуды A синусоидального входного воздействия.

Аргумент эквивалентного комплексного коэффициента усиления

$$\arctg \frac{S(A)}{R(A)}$$

определяет разность фаз первой гармоники выходной величины и входного воздействия.

Для однозначных характеристик нелинейного элемента величина $S(A) \equiv 0$.

На рис. 2.16—2.21 приведены характеристики и эквивалентные комплексные коэффициенты усиления наиболее часто встречающихся нелинейных элементов.

Если под x подразумевать комплексную величину $x = Ae^{j\omega t}$, то уравнение нелинейного элемента можно написать в комплексной форме:

$$y = K_n(A)x. \quad (2.40)$$

Пусть

$K_n(p)$ — передаточная функция линейной части системы;
 $K_n(A)$ — эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.

Предположим, что в системе возникли незатухающие колебания с частотой ω и амплитудой A на входе нелинейного элемента. Тогда уравнения этих колебаний (по первой гармонике) для нелинейного элемента можно записать в виде

$$y = K_n(A)x,$$

для линейной части системы — в виде

$$x = -K_n(j\omega)y.$$

Отсюда уравнение колебаний в системе будет

$$K_n(A)K_n(j\omega) + 1 = 0. \quad (2.41)$$

Разделяя мнимую и вещественную части, получаем два уравнения с двумя неизвестными: частотой колебаний ω и амплитудой A . Если в результате решения этих уравнений получатся действительные значения ω и A , то в системе возможно возникновение периодических колебаний. В противном случае возникновение этих колебаний в системе невозможно.

Ниже излагаются методы определения частоты и амплитуды возможных колебаний с помощью уравнения (2.41) и методы анализа устойчивости этих колебаний.

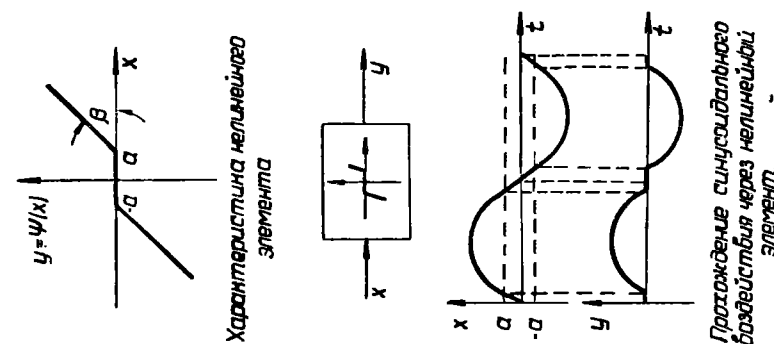
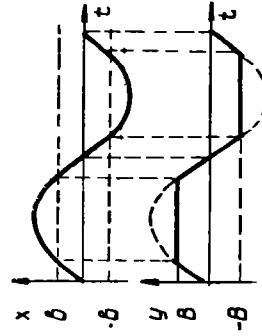
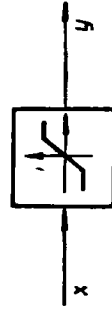
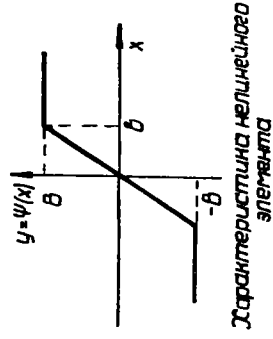
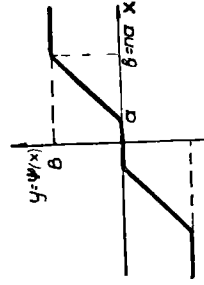
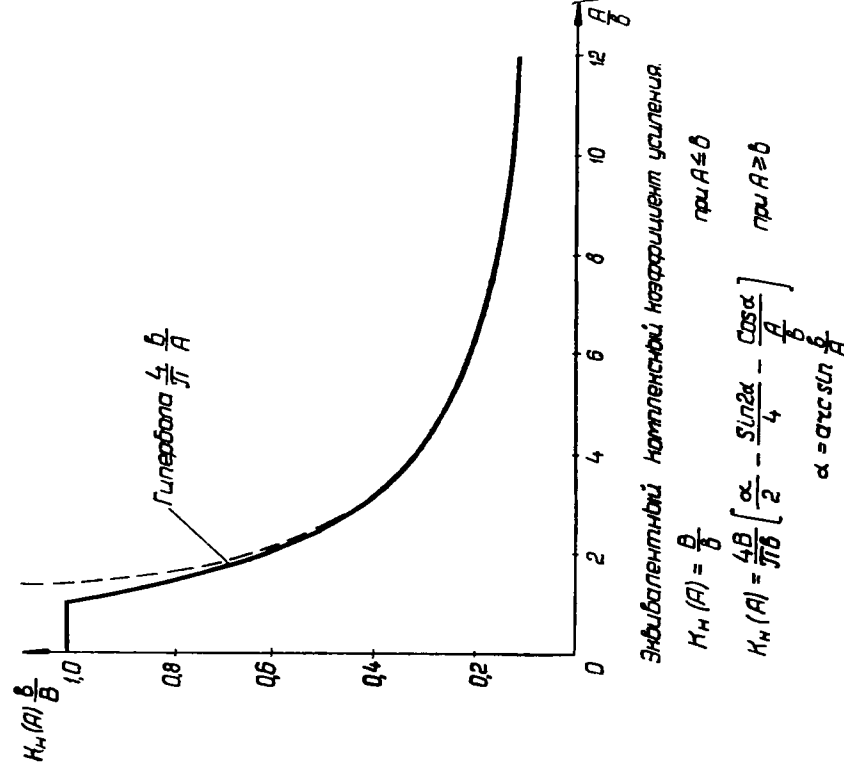


Рис. 2.16. Элемент с зоной нечувствительности

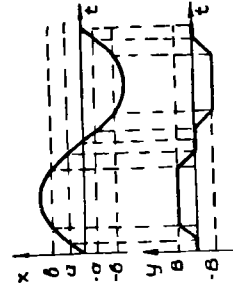
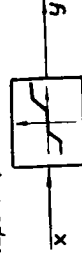


Протождение синусоидального воздействия через нелинейный элемент

Рис. 2.17. Элемент с ограниченным изменением выходной величины



характеристика нелинейного элемента



Протождение синусоидального воздействия через нелинейный элемент

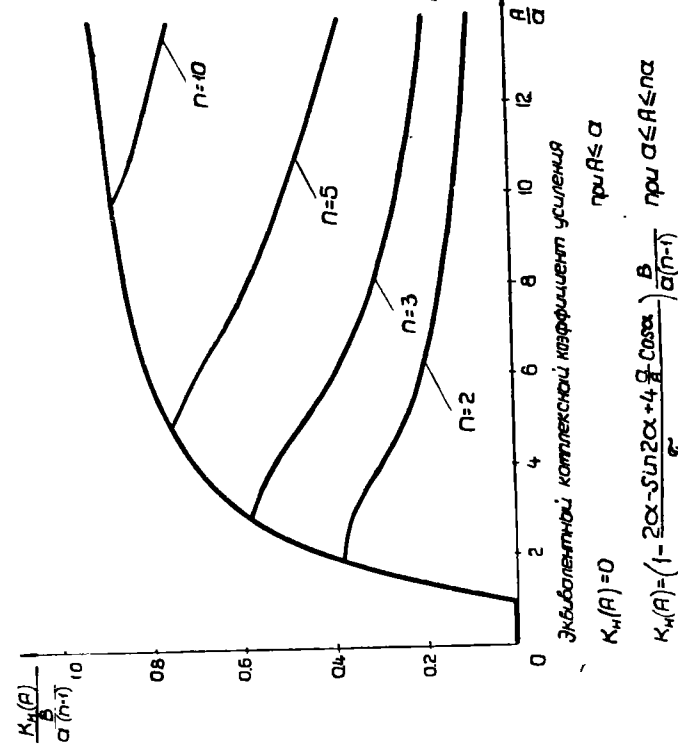
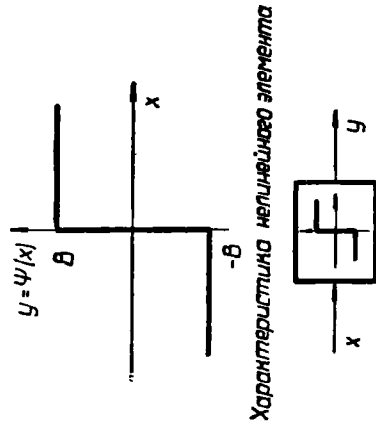
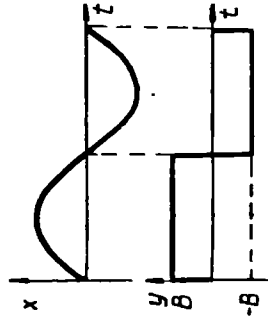


Рис. 2.18. Элемент с зоной нечувствительности и ограниченным изменением выходной величины



Характеристика нелинейного элемента



Пропускание синусоидального воздействия через нелинейный элемент

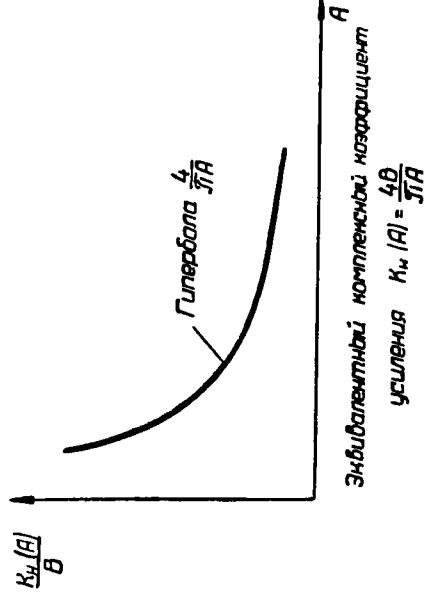
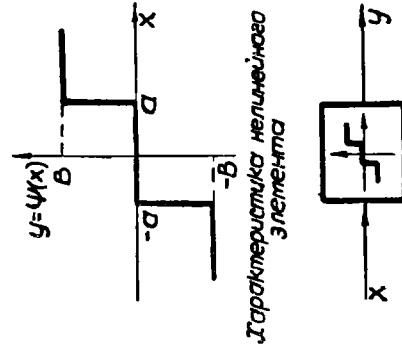
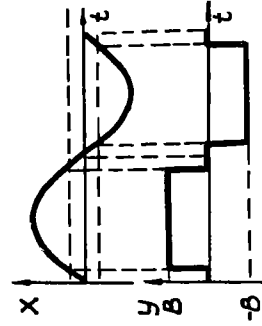


Рис. 2.19. Нелинейный элемент релейного типа



Характеристика нелинейного элемента



Пропускание синусоидального воздействия через нелинейный элемент

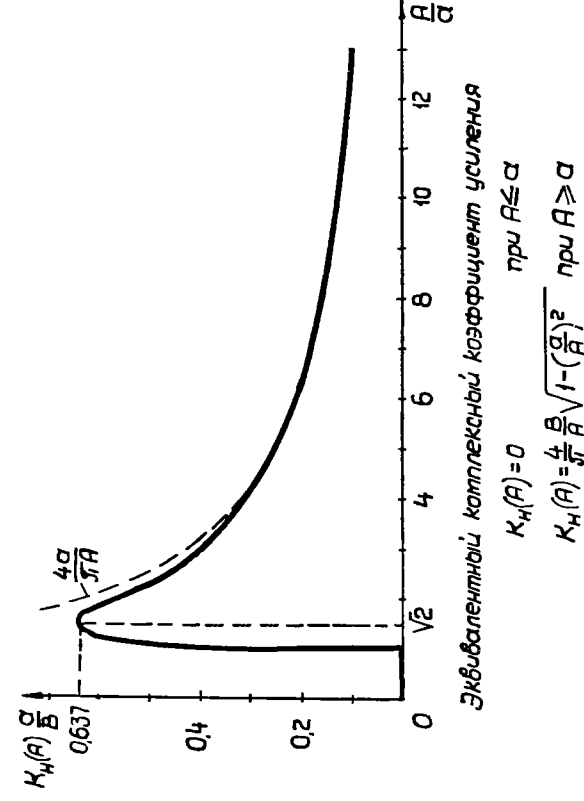


Рис. 2.20. Нелинейный элемент релейного типа с нечувствительностью

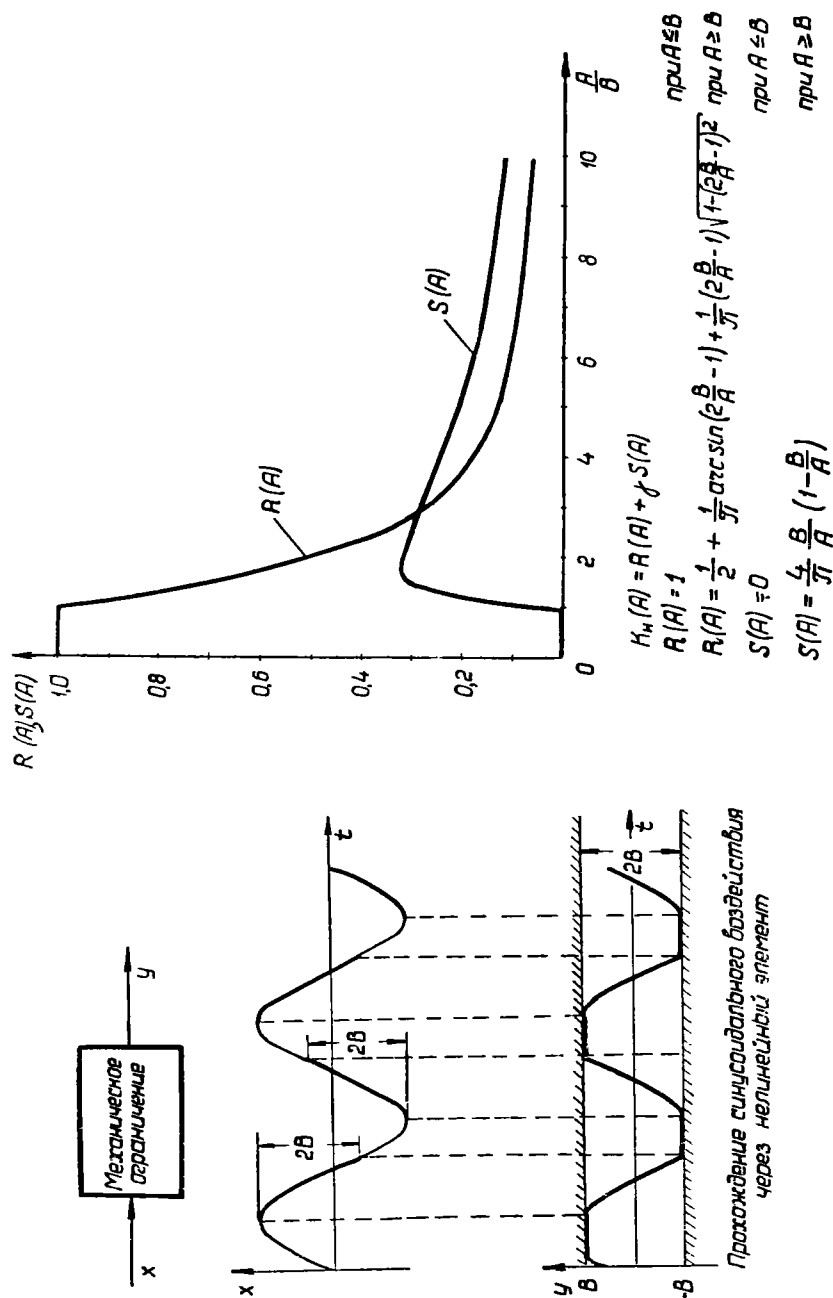


Рис. 2.21. Элемент с механическим ограничением

а) Метод амплитудно-фазовых характеристик

Решение уравнения (2.41) можно получить графически. Для этого перепишем его в следующем виде:

$$-K_L(j\omega) = \frac{1}{K_H(A)}.$$

Годограф левой части этого уравнения при изменении частоты ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы с противоположным знаком. Годограф правой части этого уравнения при изменении амплитуды в пределах от 0 до ∞ представляет собой обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента. Обе характеристики можно нанести на комплексную плоскость.

Установим критерий устойчивости системы, разомкнутая петля которой устойчива.

Если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой петли системы $K_H(A)K_L(j\omega)$ при любых значениях A не будет охватывать или пересекать точку $(-1, j0)$, то система будет абсолютно устойчивой, т. е. устойчивой при любых воздействиях; если же при любых значениях A будет охватывать, то система будет абсолютно неустойчивой, т. е. неустойчивой при любых воздействиях. При рассмотрении амплитудно-фазовой характеристики только линейной части системы $-K_L(j\omega)$ вместо точки $(-1, j0)$ следует принимать кривую $\frac{1}{K_H(A)}$.

В случае, если характеристики $-K_L(j\omega)$ и $\frac{1}{K_H(A)}$ пересекаются, система при некоторых воздействиях может быть устойчивой, а при некоторых воздействиях неустойчивой.

Пересечение их определяет, с одной стороны, частоту возможных колебаний ω [по амплитудно-фазовой частотной характеристике $-K_L(j\omega)$], с другой стороны, амплитуду этих колебаний A [по обратной амплитудно-фазовой характеристике $\frac{1}{K_H(A)}$].

Таким образом можно получить частоты и амплитуды всех возможных колебаний: устойчивых колебаний — автоколебаний и неустойчивых колебаний. Знание амплитуд и частот неустойчивых колебаний позволяет оценить воздействия, при которых система становится неустойчивой.

Как видно из рис. 2.22, возможны два случая пересечения амплитудно-фазовых характеристик.

Первый случай, когда амплитудно-фазовые характеристики пересекаются в точке M . Точка M соответствует неустойчивым колебаниям, так как при увеличении амплитуды колебаний система становится неустойчивой и амплитуда колебаний будет увеличиваться до значения амплитуды в точке N . Если допустить, что амплитуда колебания уменьшилась, то система станет устойчивой; амплитуда колебаний будет уменьшаться до нуля.

Второй случай, соответствующий точке N , как легко показать, дает устойчивые колебания (автоколебания).

Таким образом, если точка обратной амплитудно-фазовой характеристики нелинейного элемента, соответствующая увеличенной амплитуде по сравнению с амплитудой возможных колебаний, не охватывается амплитудно-фазовой частотной характеристикой (взятой с обратным знаком) линейной части системы, то рассматриваемые колебания системы устойчивы, в противном случае они неустойчивы.

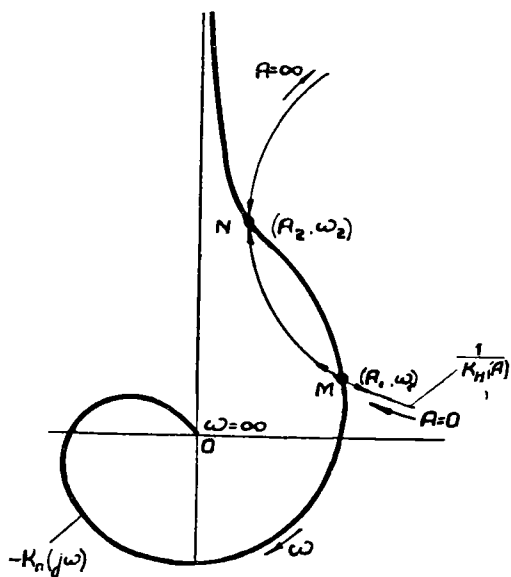


Рис. 2.22. Амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы $-K_n(j\omega)$ и обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейного элемента $1/K_n(A)$ для определения устойчивости колебаний

ния амплитуд A_1 и A_2 и частот ω_1 и ω_2 . При этом, если амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части не будет пересекать и охватывать обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента, система будет абсолютно устойчивой.

б) D-разбиение по эквивалентному комплексному коэффициенту усиления

Уравнение (2.41) для определения возможных режимов колебаний в нелинейной системе является, по сути дела, уравнением границы областей устойчивости. Это обстоятельство позволяет применить метод построения областей устойчивости (D-разбиение) для решения уравнения (2.41).

В рассмотренном выше примере (рис. 2.22) возможны два режима колебаний: первый режим, соответствующий точке M , — с частотой ω_1 и амплитудой A_1 , и второй режим, соответствующий точке N , — с частотой ω_2 и амплитудой A_2 . При этом первый режим является режимом неустойчивых колебаний, а второй — устойчивых, и амплитуда A_2 больше амплитуды A_1 .

В системе возникнут автоколебания, если воздействие на систему будет таким, что вызовет колебания в системе с амплитудой, большей амплитуды A_1 . Если воздействие будет меньше, то автоколебания в системе не возникнут.

Изменяя амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части, можно получить желаемые значения

Если на комплексной плоскости параметра $K_n(A)$ построить границу области устойчивости, определяемую уравнением (2.41), и кривую $K_n(A)$ в зависимости от амплитуды A и если эти кривые пересекутся, то точки пересечения их определяют амплитуды A и частоты ω возможных колебаний системы.

Если $K_n(A)$ — вещественная функция амплитуды A , то построение границ областей устойчивости можно производить в плоскости двух параметров: $K_n(A)$ и какого-либо параметра C .

Амплитуды A и частоты ω возможных колебаний в этом случае определяются следующим образом (рис. 2.23). Для выбранного значения параметра C находятся на границе области устойчивости значения частот ω и параметра $K_n(A)$, при которых возможны колебания в системе. По зависимости $K_n(A)$ от амплитуды A определяются соответствующие амплитуды колебаний A .

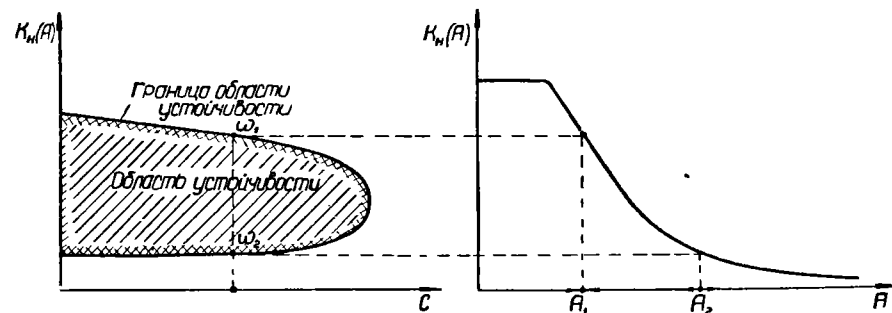


Рис. 2.23. Пример D-разбиения по эквивалентному комплексному коэффициенту усиления $K_n(A)$ и параметру C

Критерий устойчивости колебаний для рассматриваемого метода можно сформулировать в следующем виде.

Если значение эквивалентного комплексного коэффициента усиления при увеличенной амплитуде по сравнению с амплитудой возможных колебаний соответствует области устойчивости, то рассматриваемые колебания устойчивы, в противном случае они неустойчивы.

Метод D-разбиения по эквивалентному комплексному коэффициенту усиления в случае, если последний веществен, позволяет довольно легко оценивать влияние какого-либо параметра C системы на величины A и ω возможных колебаний. В этом заключается преимущество его перед методом амплитудно-фазовых характеристик.

в) Построение линий равных амплитуд и частот колебаний

Если в уравнении (2.41), определяющем возможные режимы колебаний, задать определенные значения частоты ω и амплитуды A , то это уравнение превратится в условие, накладываемое на параметры системы для осуществления заданного режима колебаний.

Пусть C_1 и C_2 — какие-либо параметры системы; тогда, разделяя мнимую и вещественную части уравнения (2.41), получим два условия, накладываемые на параметры C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} f_1(\omega, A, C_1, C_2) = 0 \\ f_2(\omega, A, C_1, C_2) = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Уравнения (2.42) аналогичны уравнениям, которые получаются при построении областей устойчивости в плоскости двух параметров для линейных систем.

Для каждого значения амплитуды A можно в плоскости двух параметров построить кривую, соответствующую границе области устойчивости, с нанесенной на ней штриховкой. Кривые, построенные для различных значений амплитуды A , называются линиями равных амплитуд. Соединяя точки кривых равных амплитуд, соответствующие равным значениям частот ω , получим линии равных частот.

Таким образом, в плоскости двух параметров получится сетка линий равных амплитуд и частот возможных колебаний, причем на линиях равных амплитуд с одной стороны будет нанесена штриховка, соответствующая области устойчивости при заданной амплитуде. Каждой паре значений параметров C_1 и C_2 на сетке кривых будут соответствовать определенные значения амплитуд A и частот ω возможных колебаний.

Определим, при каком условии возможные колебания будут устойчивы. Допустим, что амплитуда возможных колебаний A , соответствующая выбранным значениям C_1 и C_2 , увеличилась. Если при этом принятые значения параметров C_1 и C_2 окажутся внутри области устойчивости, соответствующей увеличенной амплитуде, то колебания будут устойчивыми, если вне ее, то неустойчивыми. Отсюда следует, что если штриховка на линии равных амплитуд будет направлена в сторону уменьшения амплитуд, то колебания будут устойчивыми; в противном случае колебания будут неустойчивыми.

Областями абсолютной устойчивости или неустойчивости системы (т. е. областями устойчивости или неустойчивости при любых воздействиях) будут области вне сетки линий равных амплитуд и частот возможных колебаний. При этом областью абсолютной устойчивости будет та часть плоскости параметров C_1 и C_2 , в сторону которой направлена штриховка граничной линии равной амплитуды.

На рис. 2.24 показан пример возможного расположения линий равных амплитуд $A_1—A_7$ и частот колебаний $\omega_1—\omega_7$, а также областей абсолютной устойчивости и неустойчивости на плоскости двух параметров в случае, когда возможные колебания являются устойчивыми.

На примере построения линий равных амплитуд и частот возможных колебаний можно легко увидеть разницу между линейными и нелинейными системами.

Для линейной системы практически возможны два типа движения: устойчивое и неустойчивое (отклонения всех переменных величин системы асимптотически стремятся либо к постоянной величине

или к нулю, либо неограниченно возрастают), — и только на границе области устойчивости возможны колебания неопределенной амплитуды.

Для нелинейной системы, помимо двух указанных движений, возможен третий тип движения — автоколебания (колебания с определенной амплитудой). Область возможных автоколебаний расположена между областями абсолютной устойчивости и абсолютной неустойчивости. Следовательно, линейная система является частным случаем нелинейной системы, в которой область автоколебаний вырождается в кривую, являющуюся границей области устойчивости линейной системы.

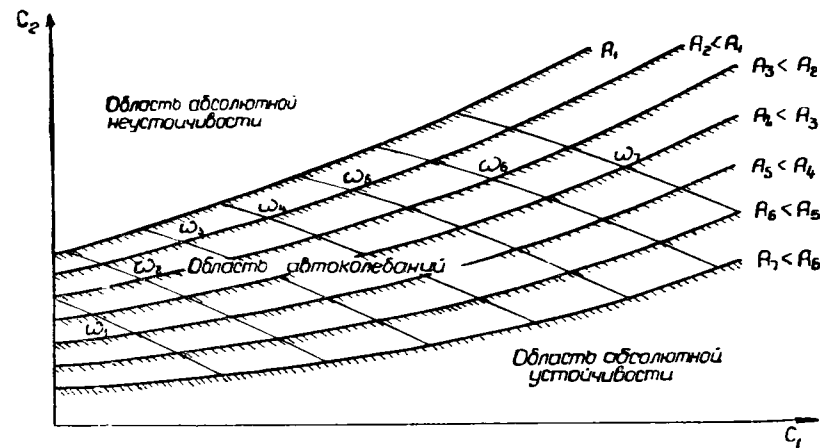


Рис. 2.24. Пример расположения линий равных амплитуд и частот колебаний (колебания устойчивы)

Построение линий равных амплитуд и частот колебаний в плоскости двух параметров дает наиболее полную картину зависимости характеристик возможных колебаний от параметров системы. Однако это построение требует большой вычислительной работы.

2. 2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Системы управления могут находиться под влиянием воздействий двух типов: управляющих воздействий, определяющих требуемые изменения выходной величины, и случайных возмущений.

Характерной чертой воздействий на систему управления является то, что не всегда можно с полной определенностью предугадать закон их изменения во времени. Однако из всего многообразия воздействий часто можно выбрать такие, которые являются наиболее типичными для реальных условий работы системы управления. Эти воздействия можно рассматривать как заданные функции времени, вызывающие переход системы из одного установившегося состояния в другое.

Для выявления характера поведения системы в реальных условиях строятся переходные и установившиеся процессы в системе при этих наиболее типичных воздействиях.

1. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Одним из точных (чисто аналитических) методов построения переходных процессов для линейных систем с постоянными коэффициентами является метод построения переходных процессов с использованием обратного преобразования Лапласа и применением теории вычетов. Однако этот метод требует вычисления корней характеристического уравнения системы и, следовательно, для анализа сложных систем является весьма громоздким.

Наибольшее развитие получили частотные методы построения переходных процессов, в особенности приближенные частотные методы, основанные на тех или иных частотных представлениях или частотных характеристиках системы управления: метод трапециoidalных частотных характеристик, метод косинусоидальных частотных характеристик и метод установившихся периодических процессов.

Построение установившихся процессов производится в зависимости от характера воздействия либо из рассмотрения передаточной функции системы, либо из рассмотрения ее частотных характеристик.

а) Метод обратного преобразования Лапласа

Метод обратного преобразования Лапласа основан на нахождении изображения выходной величины и последующего обратного преобразования этого изображения.

Пусть

$K_0(p)$ — передаточная функция системы;

$x(t)$ — воздействие на систему;

$y(t)$ — выходная величина;

$X(p)$ — изображение воздействия $x(t)$;

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt;$$

$Y(p)$ — изображение выходной величины $y(t)$;

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt.$$

Тогда изображение выходной величины

$$Y(p) = K_0(p) X(p). \quad (2.43)$$

Пользуясь обратным преобразованием Лапласа, можно получить значение выходной величины (переходный процесс):

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p) e^{pt} dp, \quad (2.44)$$

где c — число, большее абсциссы абсолютной сходимости c_0 .

Вычисление интеграла (2.44) производится при помощи вычетов подынтегральной функции в ее полюсах.

Если представить $Y(p)$ в виде

$$Y(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где $N(p)$ и $M(p)$ — полиномы аргумента p n -го и m -го порядка, причем $m < n$, а нули полинома $N(p)$ являются простыми, то вычет R_i подынтегральной функции $Y(p) e^{pt}$ в каком-либо полюсе ее [полюсы функции $Y(p)$ равны нулям полинома $N(p)$] равен

$$R_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{M(p) e^{pt} (p - p_i)}{N(p)} = \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Выражение для выходной величины (переходного процесса) в этом случае будет иметь вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (2.45)$$

Вычисление $y(t)$ по соотношению (2.45) требует определения нулей полинома $N(p)$.

Метод обратного преобразования Лапласа можно применять и в тех случаях, когда нули полинома $N(p)$ не простые. В этом случае выражение для выходной величины будет иметь более сложный вид.

Использование метода обратного преобразования Лапласа целесообразно в тех случаях, когда полином $N(p)$ имеет небольшую степень p (не более третьей) и нули его простые.

б) Частотный метод

В отличие от чисто аналитического метода обратного преобразования Лапласа частотный метод является графо-аналитическим и не требует вычисления корней характеристического уравнения. Частотный метод построения переходных процессов также основан на применении обратного преобразования Лапласа.

Представим $Y(p)$, входящее в соотношение (2.44), в виде

$$Y(p) = Y_r(p) + Y_n(p), \quad (2.46)$$

где $Y_r(p)$ содержит все полюсы $Y(p)$, расположенные в левой полуплоскости, исключая мнимую ось; $Y_n(p)$ содержит все полюсы, расположенные в правой полуплоскости, включая и мнимую ось.

Тогда переходный процесс $y(t)$ может быть представлен в виде

$$y(t) = y_r(t) + y_n(t); \quad (2.47)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_r(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} Y_r(p) e^{pt} dp \\ y_n(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y_n(p) e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Предположим, что все полюсы функции $Y_n(p)$ известны и $y_n(t)$ вычислена по изложенной выше методике.

Первый интеграл в системе (2.48) после замены p на $j\omega$ может быть записан в виде

$$y_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.49)$$

Выделим вещественную $R_r(\omega)$ и мнимую $S_r(\omega)$ части функции $Y_r(j\omega)$:

$$Y_r(j\omega) = R_r(\omega) + jS_r(\omega), \quad (2.50)$$

где $R_r(\omega)$ — четная функция ω ;
 $S_r(\omega)$ — нечетная функция ω .

Тогда

$$y_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t - S_r(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi} j \int_{-\infty}^{+\infty} [S_r(\omega) \cos \omega t + R_r(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Так как $y_r(t)$ — вещественная функция, то

$$\frac{1}{2\pi} j \int_{-\infty}^{+\infty} [S_r(\omega) \cos \omega t + R_r(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0.$$

Используя это равенство и принимая во внимание то, что функции $R_r(\omega) \cos \omega t$ и $S_r(\omega) \sin \omega t$ являются четными функциями ω , получим

$$y_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t - S_r(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.51)$$

Так как при $t < 0$ $y_r(t) \equiv 0$, то

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t + S_r(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.52)$$

Складывая и вычитая соотношения (2.51) и (2.52), найдем

$$y_r(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_r(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (2.53)$$

или

$$y_r(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S_r(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.54)$$

В результате имеем

$$y(t) = y_n(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_r(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (2.55)$$

или

$$y(t) = y_n(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S_r(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.56)$$

Выражения (2.55) и (2.56) определяют переходный процесс для широкого класса воздействий при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда функция $Y(p)$ не имеет полюсов во всей правой полуплоскости и на мнимой оси, за исключением простого полюса в начале координат. Тогда

$$\left. \begin{aligned} Y(p) &= \frac{Y_0(p)}{p} \\ Y_n(p) &= \frac{Y_0(0)}{p} \\ Y_r(p) &= \frac{Y_0(p) - Y_0(0)}{p} \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

где $Y_0(p)$ не имеет полюсов на правой полуплоскости, включая и мнимую ось.

Положим

$$\begin{aligned} Y_r(j\omega) &= R_r(\omega) + jS_r(\omega); \\ Y_0(j\omega) &= R_0(\omega) + jS_0(\omega). \end{aligned}$$

Используя соотношения (2.57), получаем

$$R_r(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{\omega};$$

$$S_r(\omega) = \frac{R_0(0) - R_0(\omega)}{\omega}.$$

Подставляя $R_r(\omega)$ и $S_r(\omega)$ в уравнения (2.55) и (2.56) и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2},$$

получим следующие формулы для вычисления переходного процесса:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (2.58)$$

или

$$y(t) = R_0(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_0(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (2.59)$$

Полученные формулы справедливы и в тех случаях, когда $Y(p)$ не имеет полюса в начале координат.

Рассмотрим применение соотношения (2.58) для построения некоторых переходных процессов.

Пусть к входу системы управления с передаточной функцией $K_0(p)$, не имеющей на правой полуплоскости (включая и мнимую ось) полюсов, приложено воздействие в виде единичного скачка

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$X(p) = \frac{1}{p};$$

$$Y(p) = K_0(p) X(p) = \frac{K_0(p)}{p}$$

и $y(t)$ определяется по формуле

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega,$$

где $R_0(\omega)$ — вещественная часть функции $K_0(j\omega)$.

Пусть

$$Y(p) = \frac{Y_0(p)}{p^2},$$

где $Y_0(p)$ не имеет полюсов на правой полуплоскости, включая и мнимую ось. Этому, например, соответствует случай, когда к входу системы управления с передаточной функцией

$$K_0(p) = \frac{K_1(p)}{p},$$

не имеющей полюсов на правой полуплоскости, за исключением простого полюса в начале координат, приложено воздействие в виде единичного скачка. Тогда

$$Y_0(p) = K_1(p)$$

и

$$Y(p) = \frac{K_0(p)}{p} = \frac{K_1(p)}{p^2},$$

где $K_1(p)$ не имеет полюсов на правой полуплоскости, включая и мнимую ось.

В этом случае $Y(p)$ можно представить в виде двух частей:

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p),$$

где

$$Y_1(p) = \frac{K_1(0)}{p^2};$$

$$Y_2(p) = \frac{K_1(p)}{p^2} - \frac{K_1(0)}{p^2}.$$

При этом $Y_2(p)$ может иметь только простой полюс в начале координат, а соответствующий $Y_2(p)$ переходный процесс будет определяться по формуле, аналогичной формуле (2.58):

$$y_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_2(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega,$$

где $R_2(\omega)$ является вещественной частью $Y_2(j\omega)j\omega$ и определяется соотношением

$$R_2(\omega) = \operatorname{Re} [Y_2(j\omega)j\omega] = \operatorname{Re} \left[\frac{K_1(j\omega)}{j\omega} - \frac{K_1(0)}{j\omega} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[K_0(j\omega) - \frac{K_1(0)}{j\omega} \right] = R_0(\omega),$$

где $R_0(\omega)$ — вещественная часть $K_0(j\omega)$.

Следовательно,

$$y_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

Переходный процесс $y_1(t)$, соответствующий функции $Y_1(p)$, равен

$$y_1(t) = K_1(0)t = R_1(0)t.$$

Таким образом,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = R_1(0)t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

При воздействии единичного импульса длительности τ (рис. 2.25,а)

$$x(t) = 1(t) - 1(t - \tau)$$

переходный процесс (рис. 2.25,б) может быть получен по соотношению

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - \tau),$$

где $y_1(t)$ — переходный процесс, возникающий при единичном скачке в момент времени $t=0$; $y_1(t - \tau)$ — переходный процесс, возникающий при единичном скачке в момент времени $t = \tau$.

При воздействии в виде линейно возрастающей функции времени

$$x(t) = t \cdot 1(t)$$

на систему управления с передаточной функцией $K_1(p)$, не имеющей полюсов на правой полуплоскости, включая и мнимую ось,

$$Y(p) = \frac{K_1(p)}{p^2}.$$

Тогда переходный процесс можно вычислить по соотношению

$$y(t) = R_1(0)t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega,$$

где $R_0(\omega)$ является вещественной частью $K_0(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{j\omega}$; $R_1(0) = K_1(0)$.

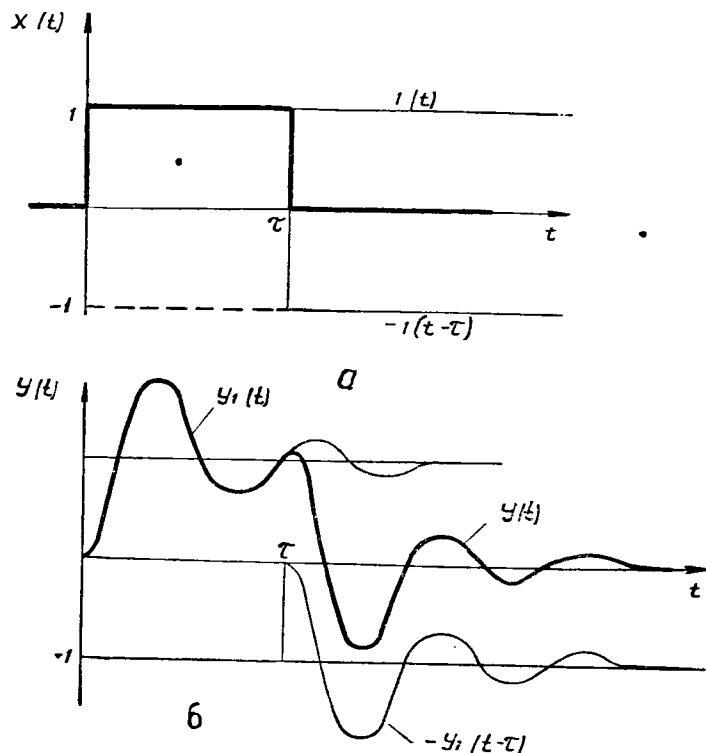


Рис. 2.25. Воздействие вида единичного импульса длительности τ и соответствующий ему переходный процесс

При воздействии в виде линейно возрастающей ограниченной функции времени (рис. 2.26,а)

$$x(t) = t \cdot 1(t) - (t - \tau) \cdot 1(t - \tau),$$

где τ — время возрастания воздействия, переходный процесс (рис. 2.26,б) может быть получен по соотношению

$$y(t) = y_2(t) - y_2(t - \tau),$$

где $y_2(t)$ — переходный процесс, получающийся при линейно возрастающем воздействии.

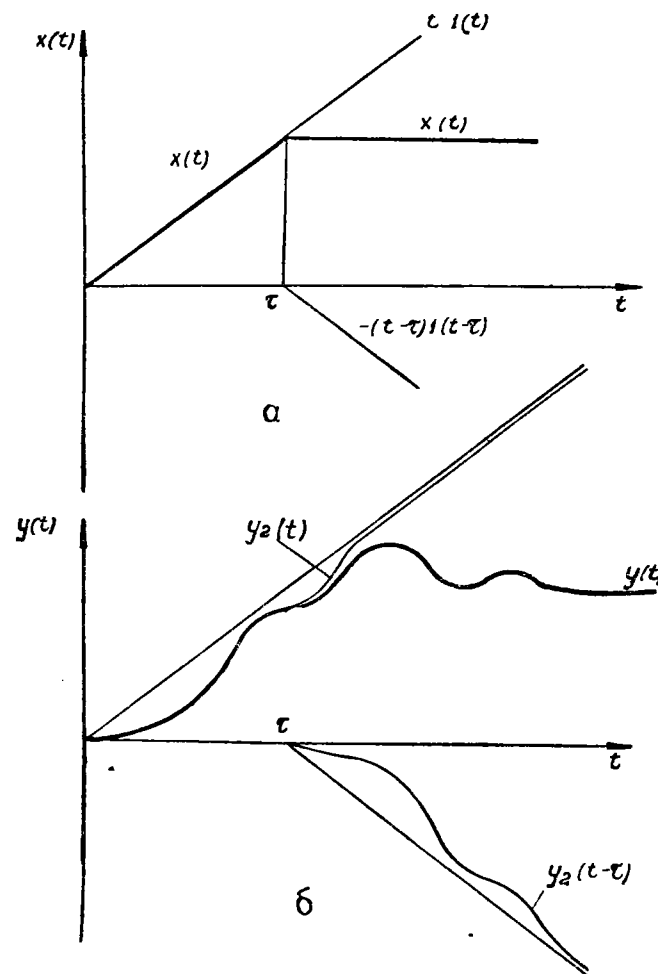


Рис. 2.26. Воздействие вида линейно возрастающей ограниченной функции и соответствующий ему переходный процесс

в) Метод трапециoidalных частотных характеристик

Метод трапециoidalных частотных характеристик, так же как и метод косинусоидальных частотных характеристик, основан на использовании формулы (2.58)

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

Формула (2.58), как было показано выше, применима для вычисления переходного процесса или затухающей его части при весьма широком классе воздействий.

Идея методов трапециoidalных и косинусoidalных частотных характеристик состоит в представлении частотной характеристики $R_0(\omega)$ в виде конечной суммы членов $r_i(\omega)$, для которых интегралы

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (2.60)$$

даются в виде табличных функций. Определение переходного процесса $y(t)$ сводится после этого к вычислению суммы

$$y(t) = \sum_i h_i(t). \quad (2.61)$$

Всякая частотная характеристика $R_0(\omega)$ может быть приближенно представлена в виде совокупности некоторого числа трапециoidalных частотных характеристик $r_i(\omega)$ (рис. 2.27) следующим образом.

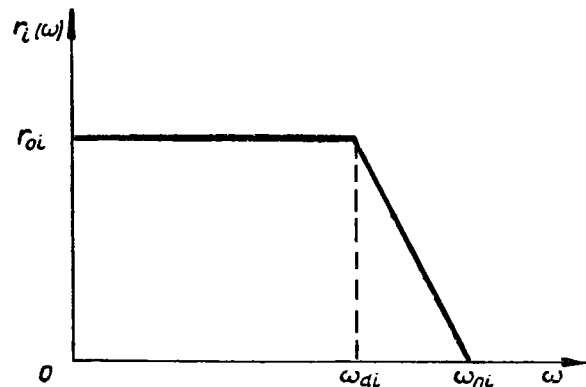


Рис. 2.27. Трапециoidalная частотная характеристика

Заменим кривую $R_0(\omega)$ достаточно мало отличающейся от нее ломаной линией и проведем через каждую из точек излома прямую линию, параллельную оси ω . Легко видеть, что в результате указанного приема частотная характеристика $R_0(\omega)$ может быть приближенно заменена несколькими трапециoidalными характеристиками $r_i(\omega)$.

Так, например, частотная характеристика $R_0(\omega)$, представленная на рис. 2.28, может быть заменена приближенно тремя трапециoidalными характеристиками $r_1(\omega)$, $r_2(\omega)$ и $r_3(\omega)$. Частотные характеристики $r_i(\omega)$ характеризуются тремя параметрами r_{0i} , ω_{ni} , ω_{di} .

Уравнения характеристики $r_i(\omega)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} r_i(\omega) &= r_{0i} && \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{di}; \\ r_i(\omega) &= r_{0i} \frac{\omega_{ni} - \omega}{\omega_{ni} - \omega_{di}} && \text{при } \omega_{di} \leq \omega \leq \omega_{ni}; \\ r_i(\omega) &= 0 && \text{при } \omega_{ni} \leq \omega. \end{aligned}$$

Определим переходный процесс $h(t)$, соответствующий трапециoidalной характеристике $r(\omega)$:

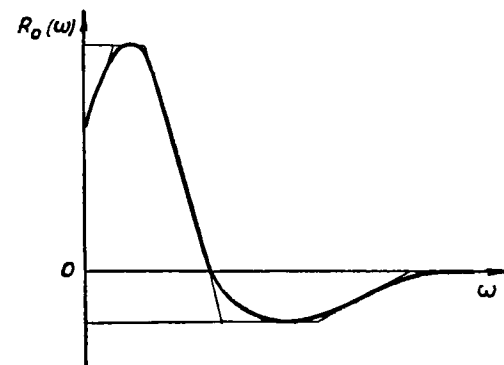
$$\left. \begin{aligned} r(\omega) &= r_0 && \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_d \\ r(\omega) &= r_0 \frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_d} && \text{при } \omega_d \leq \omega \leq \omega_n \\ r(\omega) &= 0 && \text{при } \omega_n \leq \omega \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Переходный процесс $h(t)$ в этом случае будет равен

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \\ &= \frac{2r_0}{\pi} \left\{ \text{si}(\omega_d t) + [\text{si}(\omega_n t) - \text{si}(\omega_d t)] \frac{\omega_n}{\omega_n - \omega_d} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_d t}{t} \frac{1}{\omega_n - \omega_d} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\text{si}(\omega t) = \int_0^{\omega t} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$



Введем обозначения

$$z = \frac{\omega_d}{\omega_n} \text{ и } \tau = t\omega_n. \quad (2.63)$$

Тогда можно записать

$$h(t) = r_0 h_z(\tau), \quad (2.64)$$

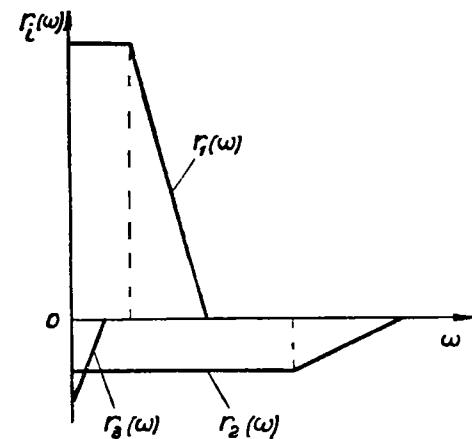


Рис. 2.28. Замена вещественной частотной характеристики суммой трапециoidalных частотных характеристик

где

$$h_z(\tau) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{si}(z\tau) + \frac{1}{1-z} [\text{si}(\tau) - \text{si}(z\tau) + \frac{\cos \tau - \cos z\tau}{\tau}] \right\}. \quad (2.65)$$

Имеются таблицы, позволяющие по данным значениям z и τ определять $h_z(\tau)$.

Переходные процессы $h_i(t)$ определяются по $h_z(\tau)$ для $z = \frac{\omega_{di}}{\omega_{ni}}$ путем умножения ординат $h_z(\tau)$ на r_{0i} ; время t при этом вычисляется по формуле

$$t = \frac{\tau}{\omega_{ni}}.$$

При $z=1$ трапеция вырождается в прямоугольник и переходный процесс $h_z(\tau)$ принимает вид

$$h_{z=1}(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{si}(\tau).$$

Этим выражением удобно пользоваться, когда $R_0(\omega)$ может быть представлена с помощью небольшого числа горизонтальных и вертикальных отрезков.

Применение метода трапециoidalных частотных характеристик целесообразно в случае, когда вещественная частотная характеристика $R_0(\omega)$ с достаточной степенью точности аппроксимируется не более чем тремя — четырьмя трапециoidalными частотными характеристиками.

г) Метод косинусоидальных частотных характеристик

Пусть частотная характеристика $R_0(\omega)$ вне интересующего нас диапазона частот $0 \leq \omega \leq \omega_0$ близка к нулю. Тогда внутри этого диапазона она может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье по косинусам. Если взять конечное число членов ряда, то получится приближенное представление частотной характеристики $R_0(\omega)$ в виде конечной суммы косинусоидальных частотных характеристик.

Если ограничиться числом членов ряда, равным N , то

$$R_0(\omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} r_k(\omega),$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_k(\omega) &= a_k \cos k\pi \frac{\omega}{\omega_0} & \text{при } \omega \leq \omega_0 \\ r_k(\omega) &= 0 & \text{при } \omega > \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Коэффициенты a_0 и a_k определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} R_0(\omega) d\omega \\ a_k &= \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} R_0(\omega) \cos k\pi \frac{\omega}{\omega_0} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

где $k=1, 2, \dots, N-1$.

Переходный процесс в этом случае будет

$$\begin{aligned} h_k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{r_k(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{1}{\pi} a_k \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega \left(t - k \frac{\pi}{\omega_0} \right)}{\omega} d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} a_k \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega \left(t + k \frac{\pi}{\omega_0} \right)}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

или

$$h_k(t) = \frac{a_k}{\pi} [\text{si}(\omega_0 t - k\pi) - \text{si}(\omega_0 t + k\pi)]. \quad (2.68)$$

На рис. 2.29 представлены функции $\frac{h_k(t)}{a_k}$ для различных значений k .

Переходный процесс $y(t)$ получается суммированием $h_k(t)$.

При построении переходных процессов вместо суммирования $h_k(t)$ целесообразнее суммировать $\bar{h}_k(t)$:

$$\bar{h}_k(t) = 1 \left(t - k \frac{\pi}{\omega_0} \right) a_k. \quad (2.69)$$

Искомую функцию $y(t)$ (рис. 2.30) можно получить сглаживанием ступенчатой функции $\bar{y}(t)$, получающейся при суммировании $\bar{h}_k(t)$.

Замена переходной функции $h_k(t)$ функцией $\bar{h}_k(t)$ соответствует тому, что функции $r_k(\omega)$ принимаются равными $a_k \cos k\pi \frac{\omega}{\omega_0}$ не в интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_0$, а в интервале $0 \leq \omega \leq \infty$.

Действительно, если

$$r_k(\omega) = a_k \cos k\pi \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \infty,$$

то

$$\bar{h}_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a_k \frac{\cos \pi \frac{k}{\omega_0} \omega \sin \omega t}{\omega} d\omega = a_k \cdot 1 \left(t - \pi \frac{k}{\omega_0} \right).$$

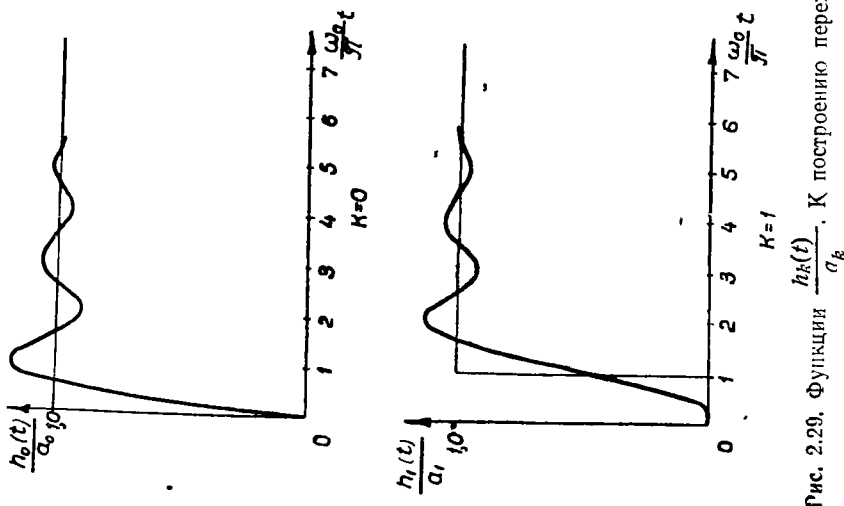


Рис. 2.29. Функции $\frac{h_k(t)}{a_k}$. К построению переходных процессов методом косинусоидальных частотных характеристик

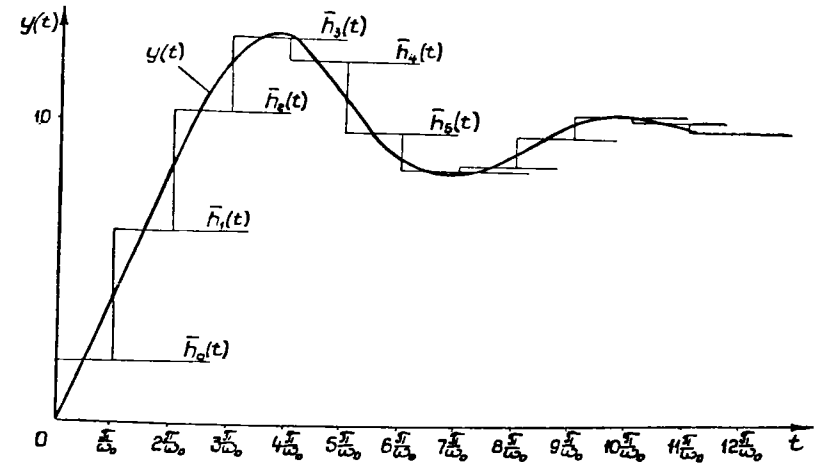
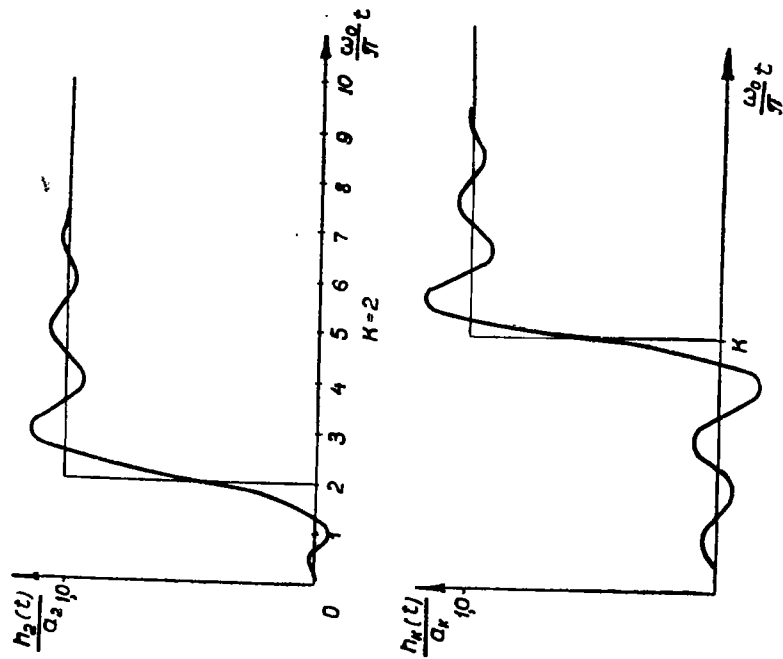


Рис. 2.30. Сглаживание ступенчатой функции. К построению переходных процессов методом косинусоидальных частотных характеристик

Таким образом, построение переходного процесса $y(t)$ сводится к построению ступенчатой функции

$$\bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 1 \left(t - \pi \frac{k}{\omega_0} \right) \quad (2.70)$$

и последующему сглаживанию ее.

Коэффициенты ряда Фурье могут быть определены приближенно следующим образом.

Разобьем интервал частот от 0 до ω_0 на N равных частей и вычислим интегралы, определяющие a_k , по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [R_0(\omega_{n-1}) + R_0(\omega_n)] \Delta\omega \\ a_k &= \frac{2}{\omega_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left[R_0(\omega_{n-1}) \cos k\pi \frac{\omega_{n-1}}{\omega_0} + \right. \\ &\quad \left. + R_0(\omega_n) \cos k\pi \frac{\omega_n}{\omega_0} \right] \Delta\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

где

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N};$$

$$\omega_n = n\Delta\omega = \frac{n}{N} \omega_0.$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} R_0(\omega_0) \\ y_1 &= R_0(\omega_1) \\ y_2 &= R_0(\omega_2) \\ &\dots \dots \dots \\ y_N &= \frac{1}{2} R_0(\omega_N) \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N y_n;$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N y_n \cos \frac{\pi}{N} kn.$$

На рис. 2.31 и 2.32 приведены формы таблиц для вычисления коэффициентов a_k по ординатам вещественной частотной характеристики $R_0(\omega)$ для $N=12$ и $N=24$.

Метод косинусоидальных частотных характеристик целесообразно применять в тех случаях, когда использование методов обратного преобразования Лапласа и трапециoidalных частотных характеристик является затруднительным.

д) Построение переходных процессов методом установившихся периодических процессов

Идея этого метода состоит в следующем:

1) переходный процесс, возникающий в системе под влиянием приложенного к ней воздействия, определяется из рассмотрения установившегося процесса, возникающего при периодическом приложении и последующем снятии этого воздействия; при этом период приложения и снятия воздействия выбирается так, чтобы время воздействия соответствовало интересующему нас участку переходного процесса, а за время отсутствия воздействия система перешла в первоначальное состояние;

2) построенное таким образом периодическое воздействие разлагается в ряд Фурье; с помощью амплитудной и фазовой частотных характеристик системы находится установившееся периодическое изменение выходной величины под влиянием этого воздействия, представленное в виде ряда Фурье;

3) интересующий нас участок переходного процесса соответствует изменению выходной величины за время приложения воздействия.

	y_0
	y_{12}
Сумма	R_0
Разность	B_0

$\cos 5 \frac{\pi}{12}$	0,25
$\cos 4 \frac{\pi}{12}$	0,50
$\cos 3 \frac{\pi}{12}$	0,707

Вклейка № 2 к книге «Методы проектирования радиолокационных систем управления реактивными самолетами-снарядами». Том I, книга первая. Воениздат, 1958 г.

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Сумма	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Разность	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	

	A_0	A_1	A_2	A_3
	A_6	A_5	A_4	
Сумма	C_0	C_1	C_2	C_3
Разность	D_0	D_1	D_2	

$$E_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$$

$$F_0 = D_0 - D_4$$

$$F_1 = D_1 - D_3 - D_5$$

$$G_0 = D_0 - D_2$$

		A_0		A_1, A_{11}		A_2, A_{10}		A_3, A_9		A_4, A_8		A_5, A_7		A_6	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\cos 5 \frac{\pi}{12}$	0,2538				B_5									B_1	
$\cos 4 \frac{\pi}{12}$	0,5000			B_4		D_2				C_2	C_1	D_4			
$\cos 3 \frac{\pi}{12}$	0,7071				B_3			F_1					$-D_3$		
$\cos 2 \frac{\pi}{12}$	0,8660			B_2		D_1						B_2			
$\cos 1 \frac{\pi}{12}$	0,9659				B_1								B_5		
$\cos 0 \frac{\pi}{12}$	1,000	E_0		B_0		D_0		F_0		C_0	C_3	D_0		G_0	
Сумма 1 столбца															
Сумма 2 столбца															
Сумма		$12 A_0 =$		$6 A_1 =$		$6 A_2 =$		$6 A_3 =$		$6 A_4 =$		$6 A_5 =$		$6 A_6 =$	
Разность				$6 A_{11} =$		$6 A_{10} =$		$6 A_9 =$		$6 A_8 =$		$6 A_7 =$			
$A_0 \div A_6$		$A_0 =$		$A_1 =$		$A_2 =$		$A_3 =$		$A_4 =$		$A_5 =$		$A_6 =$	
$A_{11} \div A_7$				$A_{11} =$		$A_{10} =$		$A_9 =$		$A_8 =$		$A_7 =$			

Рис. 2.31. Таблица для определения коэффициентов a_K ($N=12$).

Порядок вычисления коэффициентов a_K :

1. Находятся величины A_K и B_K как суммы и разности величин y_i .
2. По вычисленным величинам A_K определяются величины $C_0 - C_3$, $D_0 - D_2$ как суммы и разности величин A_K .
3. По приведенным формулам вычисляются величины E_0 , F_0 , F_1 и G_0 .
4. Таблица для вычисления a_K заполняется значениями произведений величин, указанных в каждой клетке, на значение a_0 данной строки таблицы.
5. В соответствии с порядком, указанным в таблице, определяются значения коэффициентов a_K .

	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}
	Y_{24}	Y_{23}	Y_{22}	Y_{21}	Y_{20}	Y_{19}	Y_{18}	Y_{17}	Y_{16}	Y_{15}	Y_{14}	Y_{13}	
Сумма	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
Разность	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
	A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7		
Сумма	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
Разность	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		

$$E_0 = B_0 - B_8$$

$$E_1 = B_1 - B_7 - B_9$$

$$E_2 = B_2 - B_6 - B_{10}$$

$$E_3 = B_3 - B_5 - B_{11}$$

	C_0	C_1	C_2	C_3
	C_6	C_5	C_4	
Сумма	F_0	F_1	F_2	F_3
Разность	G_0	G_1	G_2	

$$H_0 = D_0 - D_4$$

$$H_1 = D_1 - D_3 - D_5$$

$$K_0 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$$

$$L_0 = G_0 - G_2$$

		a_0		a_1, a_{23}		a_2, a_{22}		a_3, a_{21}		a_4, a_{20}		a_5, a_{19}		a_6, a_{18}		a_7, a_{17}		a_8, a_{16}		a_9, a_{15}		a_{10}, a_{14}		a_{11}, a_{13}		a_{12}		
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
$\cos 11 \frac{\pi}{24}$	0,1305				B_{11}								$-B_7$				$-B_5$									B_1		
$\cos 10 \frac{\pi}{24}$	0,2588			B_{10}				D_5				B_2				$-B_2$						D_1	$-B_{10}$					
$\cos 9 \frac{\pi}{24}$	0,3827				B_9					E_3			$-B_3$				$-B_9$				E_1				$-B_3$			
$\cos 8 \frac{\pi}{24}$	0,5000			B_8		D_4				G_2		B_9				B_8	$-F_2$	F_1				D_4		B_8				
$\cos 7 \frac{\pi}{24}$	0,6088				B_7							B_{11}				B_1									B_5			
$\cos 6 \frac{\pi}{24}$	0,7071			B_6			D_3	E_2				$-B_6$		H_1	D_6				$-E_2$				$-D_3$	$-B_6$				
$\cos 5 \frac{\pi}{24}$	0,7934				B_5							B_1				$-B_{11}$								$-B_7$				
$\cos 4 \frac{\pi}{24}$	0,8660			B_4		D_2				G_1	$-B_4$					$-B_4$						$-D_2$	B_4					
$\cos 3 \frac{\pi}{24}$	0,9239				B_3				E_1			B_9				$-B_9$				$-E_1$				B_9				
$\cos 2 \frac{\pi}{24}$	0,9659			B_2			D_1					B_{10}				$-B_{10}$						D_5	$-B_2$					
$\cos \frac{\pi}{24}$	0,9914				B_1							$-B_5$				B_7								B_{11}				
$\cos 0$	1,000	K_0		B_0		D_0		E_0		G_0		B_0		H_0		B_0	$-F_3$	E_0			D_0		B_0		L_0			
Сумма 1 столбца																												
Сумма 2 столбца																												
Сумма		$24a_0=$		$12a_1=$		$12a_2=$		$12a_3=$		$12a_4=$		$12a_5=$		$12a_6=$		$12a_7=$		$12a_8=$		$12a_9=$		$12a_{10}=$		$12a_{11}=$		$12a_{12}=$		
Разность				$12a_{23}=$		$12a_{22}=$		$12a_{21}=$		$12a_{20}=$		$12a_{19}=$		$12a_{18}=$		$12a_{17}=$		$12a_{16}=$		$12a_{15}=$		$12a_{14}=$		$12a_{13}=$				
$a_0 \div a_{12}$		$a_0=$		$a_1=$		$a_2=$		$a_3=$		$a_4=$		$a_5=$		$a_6=$		$a_7=$		$a_8=$		$a_9=$		$a_{10}=$		$a_{11}=$		$a_{12}=$		
$a_{23} \div a_{13}$				$a_{23}=$		$a_{22}=$		$a_{21}=$		$a_{20}=$		$a_{19}=$		$a_{18}=$		$a_{17}=$		$a_{16}=$		$a_{15}=$		$a_{14}=$		$a_{13}=$				

Рис. 2.32. Таблица для определения коэффициентов a_K ($N = 24$).
Порядок вычисления коэффициентов a_K :

1. Находятся величины A_K и B_K как суммы и разности величин Y_i .
2. По вычисленным величинам A_K определяются величины $C_0 - C_6$ и $D_0 - D_5$ как суммы и разности величин A_K .
3. По вычисленным величинам B_K с помощью приведенных формул определяются величины $E_0 - E_3$.
4. Находятся величины $F_0 - F_3$ и $G_0 - G_2$ как суммы и разности величин C_K .
5. По приведенным формулам вычисляются величины H_0, H_1, K_0, L_0 .
6. Таблица для вычисления коэффициентов a_K заполняется значениями произведений величин, указанных в каждой клетке, на значение косинуса дающей строки таблицы.
7. Значения коэффициентов a_K определяются в соответствии с указанным в таблице порядком.

Тогда

На рис. коэффициент $R_0(\omega)$ Метод к применять преобразов стик являет

д) Пост устан

Идея э 1) пере приложен установив вложении и приложен действия с процесса, воначальн

2) пост гается в р характери менение в ставленно

3) инт изменению выходной

Пусть входное воздействие $x(t)$ представляет собой единичный скачок. Тогда периодическое воздействие $x_{\text{пер}}(t)$ при одинаковой длительности наличия и отсутствия его (рис. 2.33) может быть записано в виде ряда Фурье

$$x_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{2\pi}{T}t}{2k-1}, \quad (2.73)$$

где T — период приложения и снятия воздействия.

Обыкновенно достаточно взять период $T \gg (4 \div 6) \frac{2\pi}{\omega_p}$, где ω_p — резонансная частота системы. Это условие соответствует тому, что за время двух — трех периодов $\frac{2\pi}{\omega_p}$ переходный процесс практически затухает.

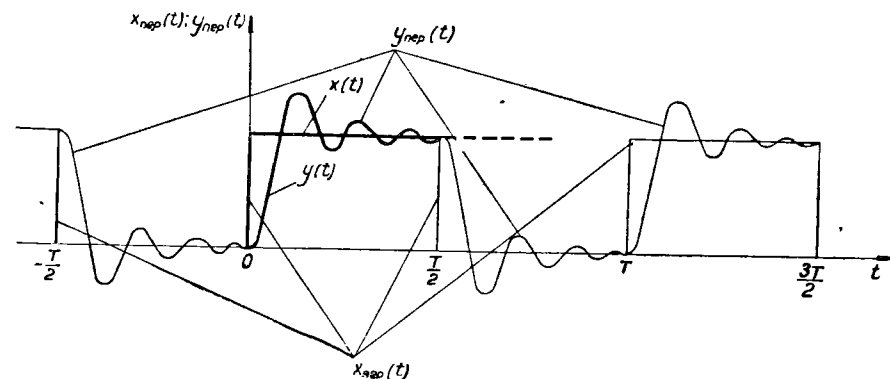


Рис. 2.33. К построению переходных процессов методом установившихся процессов

В дальнейшем частоту приложения и снятия воздействия $\frac{2\pi}{T}$ будем обозначать через ω_1 . Указанное условие тогда запишется в виде

$$\omega_1 \leq \frac{\omega_p}{4 \div 6}.$$

Пусть частотная характеристика системы управления

$$K_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\varphi_0(\omega)},$$

где $A_0(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика;
 $\varphi_0(\omega)$ — фазовая частотная характеристика.

Периодическое изменение выходной величины $y_{\text{пер}}(t)$, соответствующее периодическому воздействию $x_{\text{пер}}(t)$, будет

$$y_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2} A_0(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{2k-1} \times \\ \times \sin \{(2k-1)\omega_1 t + \varphi_0[(2k-1)\omega_1]\}. \quad (2.74)$$

При вычислении $y_{\text{пер}}(t)$ приходится ограничиваться конечным числом членов ряда Фурье.

Пусть число членов ряда Фурье, взятое при вычислении $y_{\text{пер}}(t)$, равно n . Оценим остаток ряда Фурье по отношению к установившемуся значению переходного процесса.

Остаток ряда Фурье равен

$$O(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{2k-1} \sin \{(2k-1)\omega_1 t + \varphi_0[(2k-1)\omega_1]\}.$$

Установившееся значение переходного процесса

$$y_{\text{уст}} = A_0(0).$$

Оценим остаток ряда Фурье

$$|O(t)| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{2k-1}.$$

Отсюда

$$\frac{|O(t)|}{y_{\text{уст}}} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{A_0(0)} \frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{2k-1}. \quad (2.75)$$

Если наклон логарифмической амплитудной частотной характеристики $L_0(\omega) = 20 \lg A_0(\omega)$ после частоты $(2n-1)\omega_1$ не меньше $20r$ на декаду (где r — целое число), то

$$\frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{A_0[(2n-1)\omega_1]} \leq \left(\frac{2n-1}{2k-1}\right)^r \text{ при } k \geq n. \quad (2.76)$$

Подставляя (2.76) в (2.75), получаем

$$\frac{|O(t)|}{y_{\text{уст}}} \leq \frac{A_0[(2n-1)\omega_1]}{A_0(0)} \frac{2}{\pi} (2n-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{r+1}}.$$

Отсюда легко получить условие, при котором это отношение, представляющее собой относительную погрешность в вычислении $y_{\text{пер}}(t)$, не будет превышать заданного значения ϵ :

$$\frac{A_0(0)}{A_0[(2n-1)\omega_1]} \geq \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{\pi} (2n-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{r+1}}.$$

Этим неравенством удобнее всего пользоваться в логарифмическом масштабе:

$$L_0(0) - L_0[(2n-1)\omega_1] \geq 20 \lg A,$$

где

$$A = \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{\pi} (2n-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{r+1}}.$$

В табл. 2.1 приведены значения $20 \lg A$ для $\epsilon = 2\%$ и $\epsilon = 5\%$ при $n=6$ и $n=12$ и различных значениях r .

Из таблицы, например, видно, что если ограничиться 12 членами ряда, то относительная погрешность в вычислении $y_{\text{пер}}(t)$ не будет превышать двух процентов, если частота ω_1 выбрана так, что наклон логарифмической амплитудной характеристики после частоты $23\omega_1$ не меньше 40 дБ на декаду и $L_0(0) - L_0(23\omega_1)$ не меньше 17 дБ или наклон логарифмической амплитудной характеристики после частоты $23\omega_1$ не меньше 80 дБ на декаду и $L_0(0) - L_0(23\omega_1)$ не меньше 10 дБ.

Таблица 2.1

$\epsilon\%$	n	Наклон логарифмической частотной характеристики после частоты $(2n-1)\omega_1$ не менее				
		20 дБ на декаду ($r=1$)	40 дБ на декаду ($r=2$)	60 дБ на декаду ($r=3$)	80 дБ на декаду ($r=4$)	100 дБ на декаду ($r=5$)
2	6	23 дБ	16 дБ	12 дБ	9 дБ	6 дБ
	12	24 дБ	17 дБ	13 дБ	10 дБ	8 дБ
5	6	15 дБ	8 дБ	4 дБ	1 дБ	-2 дБ
	12	16 дБ	9 дБ	5 дБ	2 дБ	0 дБ

Ограничившись определенным числом n членов ряда Фурье, с указанной выше точностью получаем выражение для выходной величины за время приложения воздействия

$$y(t) = y_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2} A_0(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{A_0[(2k-1)\omega_1]}{2k-1} \times \\ \times \sin \{(2k-1)\omega_1 t + \varphi_0[(2k-1)\omega_1]\} \quad (2.77)$$

или

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(2k-1)\omega_1 t + b_k \sin(2k-1)\omega_1 t],$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} A_0(0) \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \frac{A_0 [(2k-1) \omega_1]}{2k-1} \sin \varphi_0 [(2k-1) \omega_1] \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \frac{A_0 [(2k-1) \omega_1]}{2k-1} \cos \varphi_0 [(2k-1) \omega_1] \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

Таким образом, построение переходного процесса сводится к следующему:

1) определяются частота ω_1 и число членов n , исходя из значений $\omega_1 \leq \frac{\omega_p}{4 \div 6}$, где ω_p — резонансная частота, и из требуемой точности вычисления $y_{пер}(t)$;

2) по амплитудной и фазовой частотным характеристикам системы в соответствии с формулами (2.78) определяются коэффициенты a_k и b_k ;

3) по коэффициентам a_k и b_k с помощью таблиц (рис. 2.34 или 2.35) определяются ординаты $y_0, y_1, \dots, y_m, \dots$ переходного процесса, соответствующие моментам времени

$$\frac{T}{4n} 1, \frac{T}{4n} 2, \dots, \frac{T}{4n} m, \dots, \frac{T}{2}.$$

Для получения искомого переходного процесса достаточно вычислить значение функции $y(t)$ в интервале $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$.

Построение переходного процесса можно производить и графическим суммированием синусоид ряда (2.77).

Изложенный метод построения переходного процесса может быть использован и для других сколь угодно произвольных воздействий.

Построение переходных процессов методом установившихся процессов целесообразно в тех случаях, когда переходный процесс является достаточно быстро затухающим.

е) Построение установившихся процессов

Рассмотрим установившиеся процессы в системах управления при типовых воздействиях.

Пусть воздействие $x(t)$ равно

$$x(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_k t^k, \quad (2.79)$$

где d_0, d_1, \dots, d_k — постоянные величины.

Определим установившийся процесс в системе при этом воздействии.

Связь между выходной величиной и входным воздействием в изображениях выражается соотношением

$$Y(p) = K_0(p) X(p),$$

где $K_0(p)$ — передаточная функция системы.

	a_0	a_1	a_2	a_3
	a_0	a_1	a_2	a_3
Сумма	A_0	A_1	A_2	A_3
Разность	B_0	B_1	B_2	B_3

	b_1	b_2	b_3
	b_1	b_2	b_3
Сумма	C_1	C_2	C_3
Разность	D_1	D_2	D_3

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ E_2 &= A_1 + A_3 \\ E_3 &= A_1 - A_3 \\ F_0 &= A_0 + D_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= A_0 + D_1 - D_2 + D_3 \\ F_2 &= D_1 + D_3 \\ F_3 &= D_1 - D_3 \\ G_1 &= B_1 - B_2 - B_3 \\ H_1 &= C_1 + C_2 - C_3 \end{aligned}$$

		y_0, y_{12}		y_1, y_{11}		y_2, y_{10}		y_3, y_9		y_4, y_8		y_5, y_7		y_6	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\cos 5 \frac{\pi}{12}$	Q2588			C_1	B_3							C_3	B_1		
$\sin 1 \frac{\pi}{12}$															
$\cos 4 \frac{\pi}{12}$	Q5000					F_2						E_2			
$\sin 2 \frac{\pi}{12}$															
$\cos 3 \frac{\pi}{12}$	Q7071			C_2	B_2			H_1	G_1			$-C_2$	$-B_2$		
$\sin 3 \frac{\pi}{12}$															
$\cos 2 \frac{\pi}{12}$	Q8860						E_3				F_3				
$\sin 4 \frac{\pi}{12}$															
$\cos 1 \frac{\pi}{12}$	Q9659			C_3	B_1							C_1	B_3		
$\sin 5 \frac{\pi}{12}$															
$\cos 0 \frac{\pi}{12}$	1,000	A_0	E_1	B_0		F_0		B_0		A_0	$-A_2$	B_0		F_1	
$\sin 6 \frac{\pi}{12}$															
Сумма 1 столбца															
Сумма 2 столбца															
Сумма		$y_0 =$		$y_1 =$		$y_2 =$		$y_3 =$		$y_4 =$		$y_5 =$		$y_6 =$	
Разность		$y_{12} =$		$y_{11} =$		$y_{10} =$		$y_9 =$		$y_8 =$		$y_7 =$			

Рис. 2.34. Таблица для определения ординат y_m переходного процесса $y(t)$ ($n=6, m=0-2n$). Порядок вычисления ординат y_m переходного процесса $y(t)$:

1. По известным коэффициентам a_k и b_k находятся величины A_0-A_3 и B_0-B_3 как суммы и разности коэффициентов a_k и величины C_1-C_3 и D_1-D_3 как суммы и разности коэффициентов b_k .
2. По приведенным формулам определяются величины E_1-E_3, F_0-F_3, G_1 и H_1 .
3. Таблица для вычисления ординат переходного процесса y_m заполняется значениями произведений величин, указанных в каждой клетке, на значение косинуса (синуса) данной строки.
4. Значения ординат y_m определяются в соответствии с указанным в таблице порядком.

Для случая, когда выходная величина непосредственно сравнивается с входным воздействием:

$$Y(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)} X(p),$$

где $K(p)$ — передаточная функция разомкнутой петли системы.

Передаточную функцию $K_0(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)}$ можно в окрестности $p=0$ разложить в ряд по степеням p , так что

$$K_0(p) = c'_0 + c'_1 p + c'_2 p^2 + \dots + c'_k p^k + \dots$$

Таким образом, в окрестности $p=0$

$$Y(p) = (c'_0 + c'_1 p + c'_2 p^2 + \dots + c'_k p^k + \dots) X(p),$$

где c'_0, c'_1, \dots, c'_k — постоянные коэффициенты.

Если в этом равенстве перейти к оригиналам, то оно будет справедливо лишь для больших t , следовательно, будет давать значение выходной величины в установившемся состоянии.

Учитывая, что для данного вида воздействия [выражение (2.79)] производные $x^{(k+1)}(t) = x^{(k+2)}(t) = \dots \equiv 0$, получаем установившееся значение выходной величины в зависимости от воздействия и его производных в виде

$$y(t) = c'_0 x(t) + c'_1 \dot{x}(t) + c'_2 \ddot{x}(t) + \dots + c'_k x^{(k)}(t). \quad (2.80)$$

Установившееся значение рассогласования системы при этом будет равно

$$z(t) = x(t) - y(t) = (1 - c'_0) x(t) - c'_1 \dot{x}(t) - \dots - c'_k x^{(k)}(t)$$

или

$$z(t) = c_0 x(t) + c_1 \dot{x}(t) + c_2 \ddot{x}(t) + \dots + c_k x^{(k)}(t), \quad (2.81)$$

где

$$c_0 = 1 - c'_0;$$

$$c_1 = -c'_1;$$

$$c_2 = -c'_2;$$

$$\dots$$

$$c_k = -c'_k.$$

Коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k$ называются коэффициентами рассогласования (коэффициентами ошибок). Они определяются через параметры передаточной функции разомкнутой петли системы, которая может быть записана в следующем виде:

$$K(p) = \frac{k}{p^\nu} \frac{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n}, \quad (2.82)$$

где

ν — порядок астатизма системы;
 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — коэффициенты;
 k — коэффициент усиления разомкнутой петли системы.

В табл. 2.2 даны коэффициенты ошибок для некоторых систем управления.

Вклейка № 4 к книге «Методы проектирования радиолокационных систем управления реактивными самолетами-снарядами». Том I, книга первая. Воениздат, 1958 г.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
	a_{12}	a_{11}	a_{10}	a_9	a_8	a_7	
Сумма	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Разность	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6

$$K_1 = E_1 + E_3$$

$$K_3 = E_1 + E_3 + E_5$$

$$K_5 = E_1 + E_3 + E_5 + E_7$$

$$K_2 = E_1 + E_3 + E_5 + E_7 + E_9$$

$$K_4 = E_1 + E_3 + E_5 + E_7 + E_9 + E_{11}$$

$$K_6 = E_1 + E_3 + E_5 + E_7 + E_9 + E_{11} + E_{13}$$

$$K_7 = H_1 + H_3$$

$$K_9 = H_1 + H_3 + H_5$$

$$K_{11} = H_1 + H_3 + H_5 + H_7$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
	b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7
Сумма	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Разность	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6

$$K_7 = G_1 + G_3 + G_5$$

$$K_9 = G_1 + G_3 + G_5 + G_7$$

$$K_{11} = G_1 + G_3 + G_5 + G_7 + G_9$$

	A_0	A_1	A_2	A_3
	A_6	A_5	A_4	A_3
Сумма	E_0	E_1	E_2	E_3
Разность	F_0	F_1	F_2	F_3

$$K_9 = E_0 + H_1 + H_2 + H_3$$

$$K_{11} = E_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

$$K_{13} = E_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$$

$$L_1 = B_1 - B_4 - B_5$$

$$L_2 = B_2 - B_3 - B_6$$

$$L_3 = B_3 - B_2 - B_6$$

	D_1	D_2	D_3
	D_6	D_5	D_4
Сумма	G_1	G_2	G_3
Разность	H_1	H_2	H_3

$$M_1 = G_1 + G_4 - C_5$$

$$M_2 = C_2 + C_3 - C_6$$

$$M_3 = C_3 + C_6 - C_9$$

		$Y_0 : Y_{24}$		$Y_1 : Y_{23}$		$Y_2 : Y_{22}$		$Y_3 : Y_{21}$		$Y_4 : Y_{20}$		$Y_5 : Y_{19}$		$Y_6 : Y_{18}$		$Y_7 : Y_{17}$		$Y_8 : Y_{16}$		$Y_9 : Y_{15}$		$Y_{10} : Y_{14}$		$Y_{11} : Y_{13}$		Y_{12}	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\cos 11 \frac{\pi}{24}$	0,1305			C_1	B_5							$-C_3$	$-B_4$			C_4	$-B_3$							$-C_6$	B_1		
$\sin 11 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 10 \frac{\pi}{24}$	0,2588					G_1	F_3															G_3	F_1				
$\sin 10 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 9 \frac{\pi}{24}$	0,3827			C_2	B_5			M_1	L_2			$-C_5$	$-B_2$			C_2	$-B_5$			$-M_2$	L_1			C_5	$-B_2$		
$\sin 9 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 8 \frac{\pi}{24}$	0,5000									K_5										K_1							
$\sin 8 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 7 \frac{\pi}{24}$	0,6088			C_3	B_4							C_1	B_6			$-C_6$	B_1							$-C_4$	B_3		
$\sin 7 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 6 \frac{\pi}{24}$	0,7071					G_2	F_2							K_7	K_8							$-G_2$	$-F_2$				
$\sin 6 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 5 \frac{\pi}{24}$	0,7934			C_4	B_3							C_6	B_1			C_1	$-B_6$							C_3	$-B_4$		
$\sin 5 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 4 \frac{\pi}{24}$	0,8660									K_2										K_6							
$\sin 4 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 3 \frac{\pi}{24}$	0,9239			C_5	B_2			M_2	L_1			C_2	B_5			C_5	$-B_2$			M_1	$-L_2$			$-C_2$	B_5		
$\sin 3 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 2 \frac{\pi}{24}$	0,9659					G_3	F_1															G_1	F_3				
$\sin 2 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 1 \frac{\pi}{24}$	0,9914			C_6	B_1							$-C_4$	$-B_3$			$-C_3$	B_4							C_1	$-B_6$		
$\sin 1 \frac{\pi}{24}$																											
$\cos 0 \frac{\pi}{24}$	1,000	E_0	K_3	B_0		F_0		B_0		K_4	B_0	E_0	B_0	E_0	$-E_2$	B_0	F_0	B_0	E_0	$-E_2$	B_0	F_0	B_0	K_9			
$\sin 0 \frac{\pi}{24}$																											
Сумма 1 столбца																											
Сумма 2 столбца																											
Сумма		Y_0		Y_1		Y_2		Y_3		Y_4		Y_5		Y_6		Y_7		Y_8		Y_9		Y_{10}		Y_{11}		Y_{12}	
Разность		Y_{24}		Y_{23}		Y_{22}		Y_{21}		Y_{20}		Y_{19}		Y_{18}		Y_{17}		Y_{16}		Y_{15}		Y_{14}		Y_{13}		Y_{12}	

Рис. 235. Таблица для определения ординат y_m переходного процесса $y(t)$ ($n=12, m=1 \dots 2n$). Порядок вычисления ординат y_m переходного процесса $y(t)$:

1. По известным коэффициентам a_k и b_k находятся величины $A_0 \dots A_6$ и $B_0 \dots B_6$ как суммы и разности коэффициентов a_k и величины $C_1 \dots C_6$ и $D_1 \dots D_6$ как суммы и разности коэффициентов b_k .
2. Находятся величины $E_0 \dots E_3$ и $F_0 \dots F_3$ как суммы и разности величин A_k и величины $G_1 \dots G_3$ и $H_1 \dots H_3$ как суммы и разности величин D_k .
3. По приведенным формулам определяются величины $K_1 \dots K_9, L_1, L_2, M_1$ и M_2 .
4. Таблица для вычисления ординат переходного процесса y_m заполняется значениями произведений величин, указанных в каждой клетке, на значение косинуса (синуса) данной строки.
5. Значения ординат y_m определяются в соответствии с указанным в таблице порядком.

Передаточну
 $p=0$ разложить

Таким обра:
 $Y(p)$

где c_0, c_1, \dots

Если в этом
 ведливо лишь,
 выходной велич

Учитывая, ч
 производные
 шеся значени
 его производн

$y(t)$

Установив
 дет равно

$z(t) = x(t)$

или

$z(t)$

где

Коэффици
 рассогласова
 рез параметр
 которая мож

где
 β_1, β_2, \dots

В табл. 2.2 даны коэффициенты ошибок для некоторых систем
 управления.

Тип системы	Коэффициенты	Формулы
Статическая ($\nu=0$)	c_0	$\frac{1}{1+k}$
	c_1	$\frac{(a_1 - \beta_1) k}{(1+k)^2}$
	c_2	$\frac{(a_2 - \beta_2) k}{(1+k)^2} + \frac{a_1 (\beta_1 - a_1) k}{(1+k)^3} + \frac{\beta_1 (\beta_1 - a_1) k^2}{(1+k)^3}$
	c_3	$\frac{k(a_3 - \beta_3)}{(1+k)^2} - \frac{k[2a_1a_2 - 2k\beta_1\beta_2 + (k-1)(a_2\beta_1 - a_1\beta_2)]}{(1+k)^3} + \frac{k(a_1 - \beta_1)(a_1 + k\beta_1)^2}{(1+k)^4}$
Астатическая первого порядка ($\nu=1$)	c_0	0
	c_1	$\frac{1}{k}$
	c_2	$\frac{a_1 - \beta_1}{k} - \frac{1}{k^2}$
	c_3	$\frac{1}{k^3} + 2\frac{\beta_1 - a_1}{k^2} + \frac{a_2 - \beta_2}{k} + \frac{\beta_1(\beta_1 - a_1)}{k}$
Астатическая второго порядка ($\nu=2$)	c_0	0
	c_1	0
	c_2	$\frac{1}{k}$
	c_3	$\frac{a_1 - \beta_1}{k}$

Из табл. 2.2 и формулы (2.81) видно, что для статической системы при постоянном воздействии ошибка в установившемся состоянии не равна нулю. Для астатической системы с астатизмом первого порядка ошибка в установившемся состоянии при постоянном воздействии равна нулю. Для астатической системы с астатизмом второго порядка в установившемся состоянии ошибка системы будет равна нулю не только при постоянном, но и при линейно изменяющемся воздействии.

Пусть воздействие $x(t)$ равно

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x), \quad (2.83)$$

где A_x и φ_x — амплитуда и начальная фаза синусоидального воздействия.

Установившийся процесс для этого воздействия легко определяется через амплитудную и фазовую частотные характеристики системы $A_0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega)$:

$$y_{уст}(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y),$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_y &= A_x A_0(\omega) \\ \varphi_y &= \varphi_x + \varphi_0(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

а $A_0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega)$ определяются соотношением

$$K_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\varphi_0(\omega)}. \quad (2.85)$$

2. Линейные системы с переменными коэффициентами

В настоящее время имеется много различных методов и приемов, позволяющих получить приближенное решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Из всех методов наибольший интерес представляют методы, обобщающие широко развитые и довольно простые частотные методы анализа линейных систем с постоянными коэффициентами на системы с переменными коэффициентами. Такое обобщение при определенных предположениях о характере переменности коэффициентов в ряде случаев дает хорошие результаты.

В данном разделе рассматриваются два приближенных метода построения переходных и установившихся процессов в линейных системах с переменными коэффициентами: метод переменных частотных характеристик и метод преобразования дифференциального уравнения в уравнение изображений Лапласа.

Указанные методы построения переходных и установившихся процессов для линейных систем с переменными коэффициентами часто приводят к чрезвычайно большому объему вычислений. В этих случаях рациональнее применять методы численного интегрирования или моделирования на интеграторах.

а) Метод переменных частотных характеристик

Определим частотную характеристику линейной системы с переменными коэффициентами как отношение выходной величины системы $y(t)$ в установившемся режиме к воздействию

$$x(t) = A_x e^{j\omega t} \quad (2.86)$$

и обозначим ее через $K_0(j\omega, t)$.

Частотной характеристикой $K_0(j\omega, t)$ при замене $j\omega$ комплексной величиной p соответствует функция $K_0(p, t)$.

Можно показать, что переходный процесс в системе с переменными коэффициентами по аналогии с системами с постоянными коэффициентами при воздействии $x(t)$ будет определяться следующим выражением:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p, t) e^{pt} dp, \quad (2.87)$$

где

$$Y(p, t) = K_0(p, t) X(p);$$

$X(p)$ — изображение входного воздействия $x(t)$.

Отсюда видно, что для вычисления $y(t)$ можно применять методы построения переходных процессов в линейных системах с постоянными коэффициентами, в том числе метод обратного преобразования Лапласа и частотные методы. Построение переходного процесса при этом производится следующим образом.

Задаваясь рядом фиксированных значений параметра t и используя методы построения переходных процессов для линейных систем, строим семейство кривых переходных процессов. Затем на каждой кривой отмечаем одну точку, соответствующую по времени значению параметра t для данного переходного процесса. Полученные точки соединяем плавной кривой, которая и является графическим изображением искомого переходного процесса (рис. 2.36).

Построение переходных процессов указанным способом даже при знании функции $K_0(p, t)$ требует большой вычислительной работы. Еще более трудной задачей является определение самой функции $K_0(p, t)$. В общем случае передаточную функцию $K_0(p, t)$ найти не легче, чем решить исходное дифференциальное уравнение. Однако в некоторых частных случаях применение метода переменных частотных характеристик является рациональным.

Пусть дифференциальное уравнение системы, связывающее выходную величину с входным воздействием, имеет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t), \quad (2.88)$$

где $x(t)$ — входное воздействие;

$y(t)$ — выходная величина;

a_k — постоянные коэффициенты;

$b_i(t)$ — переменные, зависящие от времени коэффициенты;

m и n — целые числа.

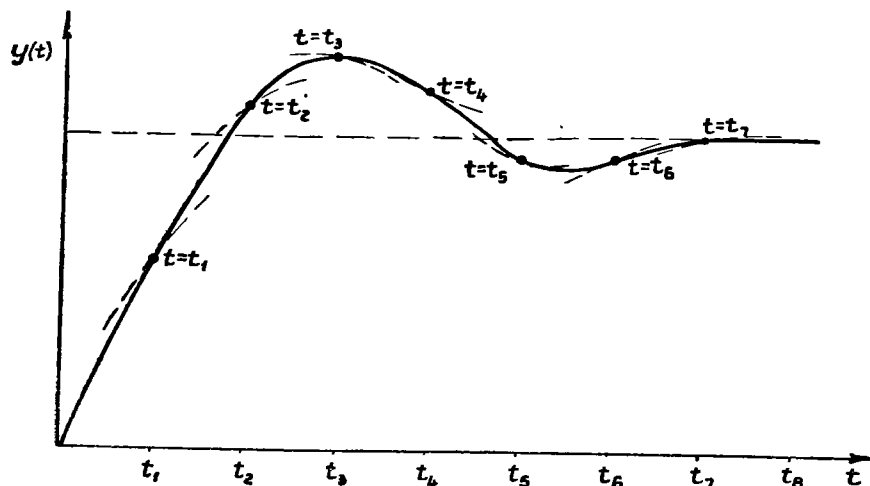


Рис. 2.36. Построение переходного процесса в системах с переменными коэффициентами

Предположим, что коэффициенты $b_i(t)$ могут быть с достаточной степенью точности аппроксимированы линейной комбинацией функций вида $e^{\alpha t}$, t^r и $t^r e^{\alpha t}$, где r — целое положительное число; α — постоянная величина.

Для нахождения частотной характеристики $K_0(j\omega, t)$ положим $x(t) = A_x e^{j\omega t}$ и будем искать частное решение уравнения (2.88), т. е. значение выходной величины $y(t)$ в установившемся режиме. Отношение полученного решения к $x(t) = A_x e^{j\omega t}$ дает искомую частотную характеристику.

Частное решение уравнения (2.88) равно сумме частных решений для каждого члена правой части уравнения. Отсюда следует, что частотная характеристика системы равна сумме частотных характеристик, полученных от каждого члена правой части уравнения.

Определим частотную характеристику, если в правой части уравнения имеется только один член вида

$$b e^{\alpha t} t^r x^{(i)}(t).$$

Уравнение для $y(t)$ в этом случае будет

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = b e^{\alpha t} t^r x^{(i)}(t). \quad (2.89)$$

Пусть среди корней характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k = 0$$

не содержится ни одного корня, равного $\alpha + j\omega$. Тогда частное решение уравнения (2.89) может быть найдено в виде

$$y(t) = A_x e^{(\alpha + j\omega)t} \sum_{l=0}^r A_l(j\omega) t^l,$$

причем

$$A_{r-l}(j\omega) = c_r^l \left\{ \frac{d^{(l)} \left[\frac{1}{D(j\omega + \alpha)} \right]}{d(j\omega)^l} \right\} b(j\omega),$$

где

$$c_r^l = \frac{r!}{(l-r)! l!};$$

$$D(j\omega + \alpha) = a_0 + a_1(j\omega + \alpha) + a_2(j\omega + \alpha)^2 + \dots + a_n(j\omega + \alpha)^n.$$

Следовательно, частотная характеристика системы, полученная от члена $e^{\alpha t} t^r x^{(i)}(t)$, будет равна

$$K_0(j\omega, t, \alpha, r, i) = \frac{y(t)}{x(t)} = e^{\alpha t} \sum_{l=0}^{r-i} c_r^l t^{r-l} b(j\omega)^i \left\{ \frac{d^{(l)} \left[\frac{1}{D(j\omega + \alpha)} \right]}{d(j\omega)^l} \right\}.$$

Просуммировав частотные характеристики от всех членов правой части уравнения (2.88), получим частотную характеристику системы

$$K_0(j\omega, t).$$

В случае когда коэффициенты левой части уравнения $a_k(t)$ также являются переменными функциями времени t и могут быть аппроксимированы линейной комбинацией функций вида $e^{\alpha t}$, для нахождения частотной характеристики можно применить метод последовательных приближений.

Действительно, пусть уравнение системы имеет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t). \quad (2.90)$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n [a_k - a_k(t)] y^{(k)}(t) + \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t), \quad (2.91)$$

где a_k — любые произвольные постоянные величины.

Для случая, когда $x(t) = A_x e^{j\omega t}$ и коэффициенты $a_k(t)$ и $b_i(t)$ являются переменными функциями времени t , решение уравнения можно производить методом последовательных приближений с использованием соотношений, выведенных для предыдущего случая.

В качестве нулевого приближения принимают $y_0(t)$:

$$\sum_{k=0}^n a_k y_0^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t).$$

Тогда уравнение для ν -го приближения будет

$$\sum_{k=0}^n a_k y_\nu^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n [a_k - a_k(t)] y_{\nu-1}^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^m b_i(t) x^{(i)}(t). \quad (2.92)$$

Для ускорения решения уравнения в качестве коэффициентов a_k целесообразно принимать средние значения $a_k(t)$ за интересующий нас промежуток времени или их значения для рассматриваемого момента времени.

Частотная характеристика системы при ν -м приближении

$$K_{0\nu}(j\omega, t) = \frac{y_\nu(t)}{x(t)}. \quad (2.93)$$

б) Метод преобразования дифференциального уравнения в уравнение изображений Лапласа

Пусть дифференциальное уравнение системы, связывающее выходную величину с входным воздействием, имеет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t), \quad (2.94)$$

где $x(t)$ — входное воздействие;
 $y(t)$ — выходная величина;
 $a_k(t)$ и $b_i(t)$ — переменные, зависящие от времени коэффициенты;
 m и n — целые числа.

Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа, получим уравнение для изображения $Y(p)$ выходной величины $y(t)$. При определенных предположениях относительно характера переменности коэффициентов полученное уравнение может быть решено достаточно просто методом последовательных приближений. Для получения достаточно быстрой сходимости при использовании метода последовательных приближений дифференциальное уравнение (2.94) записывают в виде уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n [a_k - a_k(t)] y^{(k)}(t) + \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}(t), \quad (2.95)$$

тождественного (2.94), где под a_k понимают среднее значение коэффициента $a_k(t)$ за интересующий нас промежуток времени или его значение в рассматриваемый момент времени.

Соответствующее уравнение для изображения $Y(p)$ будет

$$D(p) Y(p) = \Phi_1[Y(p)] + \Phi_2[X(p)], \quad (2.96)$$

где

$$D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n = \sum_{k=0}^n a_k p^k;$$

$$\Phi_1[Y(p)] = \sum_{k=0}^n \int_0^\infty [a_k - a_k(t)] y^{(k)}(t) e^{-pt} dt;$$

$$\Phi_2[X(p)] = \sum_{i=0}^m \int_0^\infty b_i(t) x^{(i)}(t) e^{-pt} dt.$$

При определении нулевого приближения $Y_0(p)$ изображения $Y(p)$ принимают $\Phi_1[Y(p)] = 0$, тогда

$$Y_0(p) = \frac{\Phi_2[X(p)]}{D(p)}.$$

Первое приближение может быть найдено заменой в правой части уравнения (2.96) $Y(p)$ на $Y_0(p)$.

Отсюда

$$Y_1(p) = \frac{\Phi_2[X(p)]}{D(p)} + \frac{\Phi_1[Y_0(p)]}{D(p)}.$$

Соответственно ν -е приближение может быть найдено из уравнения (2.96) как

$$Y_\nu(p) = \frac{\Phi_2[X(p)]}{D(p)} + \frac{\Phi_1[Y_{\nu-1}(p)]}{D(p)}.$$

В ряде случаев коэффициенты $a_k(t)$ и $b_i(t)$ могут быть с достаточной степенью точности аппроксимированы линейной комбинацией функций типа e^{at} . Тогда изображения (интегралы) $\Phi_1[Y_{\nu-1}(p)]$ и $\Phi_2[X(p)]$ могут быть без указанных вычислений непосредственно выражены через изображения $Y_{\nu-1}(p)$ и $X(p)$.

Действительно, если изображение функции $x(t)$ равно $X(p)$, то изображение функции $e^{at} x^{(m)}(t)$ равно $(p-a)^m X(p-a)$.

По изображению выходной величины, полученному методом последовательных приближений, определяется с помощью одного из методов построения переходных процессов в линейных системах с постоянными коэффициентами приближенное решение уравнения (2.94), т. е. изменение выходной величины системы по времени (переходный и установившийся процессы).

3. Импульсные системы

Из существующих методов построения переходных и установившихся процессов в импульсных системах наиболее простыми являются метод обратного дискретного преобразования изображения выходной величины системы и метод суммирования реакций линейной

части системы на отдельные импульсы. Следует отметить, что второй из указанных методов позволяет вычислять переходные процессы для импульсных систем и в тех случаях, когда сразу после импульсного элемента следуют нелинейные элементы.

а) Метод обратного дискретного преобразования Лапласа

Отношение дискретного преобразования Лапласа $Y^*(q, \varepsilon)$ выходной величины к дискретному преобразованию Лапласа $X^*(q)$ входного воздействия равно передаточной функции $K_{oi}^*(q, \varepsilon)$ импульсной системы. Согласно уравнению (2.33)

$$\frac{Y^*(q, \varepsilon)}{X^*(q)} = K_{oi}^*(q, \varepsilon). \quad (2.97)$$

Отсюда

$$Y^*(q, \varepsilon) = K_{oi}^*(q, \varepsilon) X^*(q), \quad (2.98)$$

где $i=I$ при $0 \leq \varepsilon < \gamma$; $i=II$ при $\gamma \leq \varepsilon < 1$.

Передаточная функция $K_{oi}^*(q, \varepsilon)$ является функцией e^q и поэтому может быть представлена в виде

$$K_{oi}^*(q, \varepsilon) = \frac{b_m^i e^{qm} + b_{m-1}^i e^{q(m-1)} + \dots + b_0^i}{a_l e^{ql} + a_{l-1} e^{q(l-1)} + \dots + a_0}, \quad (2.99)$$

где $b_0^i - b_m^i$, $a_0 - a_l$ — постоянные коэффициенты, причем $m \leq l$.

Как видно из выражений (2.29), (2.30) и (2.31), для передаточной функции $K_{oi}^*(q, \varepsilon)$ коэффициенты b_m^i , b_{m-1}^i , ..., b_0^i являются функциями ε , а коэффициенты a_l , a_{l-1} , ..., a_0 от ε не зависят.

Преобразуя выражение (2.99), перепишем его в виде

$$K_{oi}^*(q, \varepsilon) = \frac{b_m^i + b_{m-1}^i e^{-q} + \dots + b_0^i e^{-qm}}{a_l + a_{l-1} e^{-q} + \dots + a_0 e^{-ql}} e^{-q(l-m)}. \quad (2.100)$$

Разложим дробь в ряд по степеням e^{-q} :

$$\frac{b_m^i + b_{m-1}^i e^{-q} + \dots + b_0^i e^{-qm}}{a_l + a_{l-1} e^{-q} + \dots + a_0 e^{-ql}} = \Gamma_0^i + \Gamma_1^i e^{-q} + \Gamma_2^i e^{-2q} + \dots, \quad (2.101)$$

где Γ_0^i , Γ_1^i , Γ_2^i , ... — коэффициенты разложения.

Для того чтобы найти коэффициенты Γ_0^i , Γ_1^i , Γ_2^i , ..., умножим обе части равенства на $a_l + a_{l-1} e^{-q} + \dots + a_0 e^{-ql}$, после чего

произведем сравнение коэффициентов при одинаковых степенях e^{-q} . Тогда получим

$$\begin{aligned} b_m^i &= \Gamma_0^i a_l; \\ b_{m-1}^i &= \Gamma_0^i a_{l-1} + \Gamma_1^i a_l; \\ &\dots \\ b_{m-k}^i &= \Gamma_0^i a_{l-k} + \Gamma_1^i a_{l-k+1} + \Gamma_2^i a_{l-k+2} + \dots + \Gamma_k^i a_l. \end{aligned}$$

Из последнего равенства получаем рекуррентное соотношение

$$\Gamma_k^i = \frac{1}{a_l} \left(b_{m-k}^i - \sum_{\nu=1}^k \Gamma_{k-\nu}^i a_{l-\nu} \right),$$

причем

$$\Gamma_0^i = \frac{b_m^i}{a_l}.$$

При $k > l$ имеем $a_{l-k} = b_{m-k} = 0$. Отсюда

$$\Gamma_k^i = -\frac{1}{a_l} \sum_{\nu=1}^l \Gamma_{k-\nu}^i a_{l-\nu} \quad \text{при } k > l.$$

Рекуррентные соотношения для Γ_k^i дают возможность последовательно вычислять Γ_k^i .

Таким образом, передаточная функция $K_{oi}(q, \varepsilon)$ может быть представлена в виде

$$K_{oi}(q, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^i e^{-q(k+l-m)}. \quad (2.102)$$

Уравнение (2.98) для изображения выходной величины, используя соотношение (2.102), можно записать в следующем виде:

$$Y^*(q, \varepsilon) = K_{oi}^*(q, \varepsilon) X^*(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^i e^{-q(k+l-m)} X^*(q). \quad (2.103)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$y[n, \varepsilon] = \sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i x[n-k-l+m] \quad (2.104)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{aligned} y[n, \varepsilon] &= 0 \quad \text{при } n < l-m; \\ y[n, \varepsilon] &= \Gamma_0^i x[0] \quad \text{при } n = l-m; \\ y[n, \varepsilon] &= \Gamma_0^i x[1] + \Gamma_1^i x[0] \quad \text{при } n = l-m+1; \\ y[n, \varepsilon] &= \Gamma_0^i x[2] + \Gamma_1^i x[1] + \Gamma_2^i x[0] \quad \text{при } n = l-m+2; \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление переходного процесса сводится к суммированию смещенных значений воздействия $x[n]$, умноженных на соответствующие коэффициенты Γ_k^i . Так как Γ_k^i являются функциями ϵ (при $i=I$ $0 \leq \epsilon < \gamma$ и при $i=II$ $\gamma \leq \epsilon < 1$), то эти формулы дают возможность вычислить переходный процесс в любой момент относительного времени $\bar{t} = n + \epsilon$. По этим формулам можно вычислять переходный процесс для любого вида воздействий.

В случае когда воздействие имеет вид единичного скачка, переходный процесс находится простым суммированием коэффициентов Γ_k^i .

Установившийся процесс при этом воздействии может быть получен как сумма всех Γ_k^i , которая согласно (2.100) и (2.101) равна значению передаточной функции системы при $q=0$:

$$y_{уст}[n, \epsilon] = K_{0i}^*(0, \epsilon).$$

Отсюда видно, что в отличие от непрерывных линейных систем в импульсных системах при воздействии единичного скачка установившийся процесс, зависящий от ϵ , может быть периодическим с периодом T_0 (в относительном времени \bar{t} с периодом, равным единице). Этот факт является очевидным, так как в установившемся состоянии на линейную часть системы (при $\gamma < 1$) воздействует последовательность импульсов, а не постоянная величина.

Если воздействие, приложенное к импульсной системе, является гармоническим, т. е.

$$x(t) = Ae^{j\omega t}, \quad (2.105)$$

то

$$x[n] = Ae^{j\bar{\omega}n},$$

где $\bar{\omega} = \omega T_0$ — безразмерная частота.

Подставляя $x[n]$ в формулу (2.104), получаем

$$\begin{aligned} y[n, \epsilon] &= \sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i A e^{j\bar{\omega}(n-k-l+m)} = \\ &= A e^{j\bar{\omega}n} \sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i e^{-j\bar{\omega}(k+l-m)} \end{aligned}$$

или

$$y[n, \epsilon] = \left[\sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i e^{-j\bar{\omega}(k+l-m)} \right] x[n].$$

Установившееся значение выходной величины, получающееся при $n \rightarrow \infty$, будет равно

$$y_{уст}[n, \epsilon] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^i e^{-j\bar{\omega}(k+l-m)} \right] x[n].$$

Сравнивая выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^i e^{-j\bar{\omega}(k+l-m)}$$

с выражением (2.102) для передаточной функции системы $K_{0i}(q, \epsilon)$, видим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^i e^{-j\bar{\omega}(k+l-m)} = K_{0i}(j\bar{\omega}, \epsilon).$$

Аналогично определению установившегося значения выходной величины в линейной системе с постоянными коэффициентами нахождение установившегося значения выходной величины в импульсной системе при гармоническом воздействии производится по соотношению

$$y_{уст}[n, \epsilon] = K_{0i}(j\bar{\omega}, \epsilon) x[n]. \quad (2.106)$$

В отличие от непрерывных систем в импульсных системах при некоторых условиях переходный процесс от единичного скачка может оканчиваться в течение конечного промежутка времени. Действительно, предположим, что нам удалось выбрать параметры импульсной системы так, что

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{l-2} = a_{l-1} = 0, \text{ но } a_l \neq 0.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_k^i &= \frac{b_{m-k}^i}{a_l} \quad \text{при } k \leq m; \\ \Gamma_k^i &= 0 \quad \text{при } k > m. \end{aligned}$$

Следовательно, при воздействии вида единичного скачка, начиная с $n \geq l$:

$$y[n, \epsilon] = \sum_{k=0}^m \frac{b_{m-k}^i}{a_l} = \text{const.}$$

Отсюда следует, что переходный процесс в этом случае будет оканчиваться при $n=l$.

б) Метод суммирования реакций линейной части системы на отдельные импульсы

Пусть с выхода импульсного элемента поступает последовательность импульсов. Реакция линейной части системы на каждый из этих импульсов, а следовательно, и на все импульсы может быть определена методами построения переходных процессов для линейных систем. Зная реакцию линейной части системы и входное воздействие, легко определить последовательность импульсов на выходе импульсного элемента. Таким образом, уравнения, определяющие

переходный процесс в системе, замыкаются. Так как величина какого-либо импульса на выходе импульсного элемента зависит от реакций линейной части системы только на предыдущие импульсы, то для вычисления переходного процесса может быть получено рекуррентное соотношение.

Этот метод построения переходных процессов может быть применен и для импульсных систем, в которых сразу после импульсного элемента следуют нелинейные элементы.

Выведем рекуррентные соотношения для построения переходного процесса в нелинейной импульсной системе, изображенной на рис. 2.37.

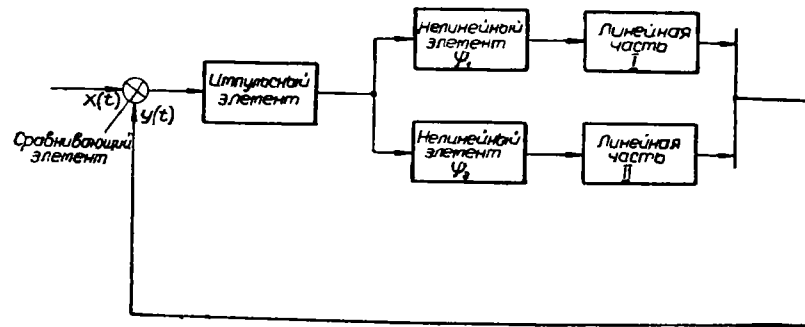


Рис. 2.37. Структурная схема нелинейной импульсной системы

Пусть с выхода импульсного элемента поступает последовательность импульсов с высотами H_0, H_1, H_2, \dots

Тогда на линейную часть I системы будет поступать последовательность импульсов с высотами $\Psi_1(H_0), \Psi_1(H_1), \Psi_1(H_2), \dots$, а на линейную часть II системы — с высотами $\Psi_2(H_0), \Psi_2(H_1), \Psi_2(H_2), \dots$, где Ψ_1 и Ψ_2 — характеристики нелинейных элементов.

Если обозначить через $h_{1n}(\bar{t})$ и $h_{2n}(\bar{t})$ ($\bar{t} = \frac{t}{T_0}$ — относительное время) реакции линейных частей I и II системы на единичные импульсы, то значение выходной величины в момент времени $\bar{t} = n$ будет

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} [\Psi_1(H_k) h_{1n}(n-k) + \Psi_2(H_k) h_{2n}(n-k)]. \quad (2.107)$$

Имея значение выходной величины системы $y(n)$ и входного воздействия $x(k)$, получим высоты импульсов на выходе импульсного элемента

$$H_k = k_n [x(k) - y(k)], \quad (2.108)$$

где k_n — коэффициент усиления импульсного элемента.

Формулы (2.107) и (2.108) представляют собой рекуррентные соотношения для вычисления $y(n)$. Представим эти формулы в развернутом виде:

$$H_0 = k_n x(0); \quad y(1) = \Psi_1(H_0) h_{1n}(1) + \Psi_2(H_0) h_{2n}(1);$$

$$H_1 = k_n [x(1) - y(1)]; \quad y(2) = [\Psi_1(H_0) h_{1n}(2) + \Psi_2(H_0) h_{2n}(2)] + [\Psi_1(H_1) h_{1n}(1) + \Psi_2(H_1) h_{2n}(1)];$$

$$H_2 = k_n [x(2) - y(2)]; \quad y(3) = [\Psi_1(H_0) h_{1n}(3) + \Psi_2(H_0) h_{2n}(3)] + [\Psi_1(H_1) h_{1n}(2) + \Psi_2(H_1) h_{2n}(2)] + [\Psi_1(H_2) h_{1n}(1) + \Psi_2(H_2) h_{2n}(1)];$$

По этим соотношениям можно определить $y(\bar{t})$ только в дискретные моменты $\bar{t} = 1, 2, 3, \dots$. После вычисления $y(\bar{t})$ в дискретные моменты и определения H_k можно определить значение $y(\bar{t})$ в любой момент:

$$y(\bar{t}) = \sum_{k=0}^n \{ \Psi_1(H_k) h_{1n}(\bar{t} - k) + \Psi_2(H_k) h_{2n}(\bar{t} - k) \},$$

где n — целое число от $t(n \leq \bar{t} < n+1)$;

H_k — уже известные величины.

Реакции $h_{1n}(\bar{t})$ и $h_{2n}(\bar{t})$ линейных частей системы на единичные импульсы удобнее всего вычислять как разности реакций от двух единичных скачков. При вычислении в большинстве случаев рационально пользоваться методом обратного преобразования Лапласа, так как корни характеристических уравнений линейных частей системы находятся очень просто.

Таким образом, указанный метод позволяет довольно просто производить построение переходного процесса для любого вида входного воздействия при наличии в системе нелинейных элементов, причем наличие нелинейных элементов не затрудняет построения переходного процесса.

4. Нелинейные системы

Существующие методы построения переходных и установившихся процессов в нелинейных системах можно разбить на две группы: аналитические методы и графо-аналитические методы.

Аналитические методы заключаются или в непосредственном нахождении решения уравнений или в последовательном решении уравнений для отдельных промежутков времени, внутри которых систему можно считать линейной.

Первый метод применим в тех случаях, когда удастся найти общее решение системы уравнений, что в практических задачах бывает очень редко. Второй метод может быть применен, если характеристики нелинейных элементов могут быть аппроксимированы линейными отрезками. Последнее условие практически всегда

выполняется, однако само решение требует весьма большой вычислительной работы.

Графо-аналитические методы построения переходных и установившихся процессов заключаются в приближенном графическом интегрировании уравнений системы. В большинстве случаев решение задачи сводится к большому графическому построению.

Для построения переходных процессов в нелинейных системах почти во всех случаях рационально применять либо метод численного интегрирования, либо моделирование на интеграторах.

Для оценки характера установившихся процессов в нелинейных системах при гармоническом воздействии, а также для приближенного определения характеристик установившихся процессов (автоколебаний) рационально применять метод гармонического баланса, изложенный в разделе 2.1.

5. Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений

а) Описание метода

В настоящее время известен целый ряд методов численного интегрирования. Наиболее простым из них является метод Эйлера. Этот метод нашел весьма широкое применение для анализа рассматриваемых систем управления, особенно для нелинейных систем и систем с переменными коэффициентами.

Метод численного интегрирования дает полную картину последовательного изменения параметров, характеризующих поведение системы во времени.

Сущность метода Эйлера сводится к нахождению значений функции, заданной дифференциальным уравнением, в последовательные моменты времени; значения функции в рассматриваемый момент времени находятся в зависимости от предыдущих значений функции и ее производных в момент времени, отличающийся от рассматриваемого на величину шага интегрирования.

Пусть искомая функция y определяется дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{y} = f(y, t)$$

и начальным условием $y = y_0$ при $t = t_0$.

Значение функции y на некотором достаточно малом промежутке времени h относительно момента t_0 можно выразить приближенно формулой

$$y = y_0 + (t - t_0) \dot{y}_0 = y_0 + (t - t_0) f(y_0, t_0).$$

Для момента времени $t_1 = t_0 + h$

$$y_1 = y_0 + h \dot{y}_0.$$

Аналогично для момента времени $t_2 = t_1 + h$

$$y_2 = y_1 + h \dot{y}_1.$$

Таким образом, можно составить таблицу значений y_k для моментов времени $t_k = t_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), причем

$$y_k = y_{k-1} + h \dot{y}_{k-1},$$

где

$$\dot{y}_{k-1} = f(y_{k-1}, t_{k-1}).$$

Метод Эйлера применяется обычно для решения системы дифференциальных уравнений, приведенных предварительно к системе уравнений первого порядка. Задача в этом случае сводится к нахождению значений нескольких функций и их производных одновременно через те же определенные промежутки времени h , называемые шагом интегрирования.

Пусть, например, система дифференциальных уравнений приведена к системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_x(x, y, z, t) \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z, t) \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}$$

Тогда аналогичным образом получаем формулы для определения x , y и z в моменты времени $t = t_0 + kh$:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + h \dot{x}_{k-1}, \text{ где } \dot{x}_{k-1} = f_x(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, t_{k-1}) \\ y_k &= y_{k-1} + h \dot{y}_{k-1}, \text{ где } \dot{y}_{k-1} = f_y(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, t_{k-1}) \\ z_k &= z_{k-1} + h \dot{z}_{k-1}, \text{ где } \dot{z}_{k-1} = f_z(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, t_{k-1}) \end{aligned} \right\}$$

Для систем управления, представляющих замкнутые системы, применение метода Эйлера при достаточно малом шаге интегрирования не приводит к накоплению ошибок.

Увеличение шага интегрирования может привести к завышению колебательности получаемого численным интегрированием переходного процесса по сравнению с колебательностью истинного переходного процесса.

На рис. 2.38 показано влияние шага на переходный процесс при численном интегрировании уравнения

$$T^2 \ddot{y} + 2\xi T \dot{y} + y = 0, \quad (2.109)$$

где $T = 0,1$ сек.; $\xi = 0,1$; $y_0 = 1$; $\dot{y}_0 = 0$, с шагом $h = 0,01$ сек. и $h = 0,02$ сек.

При некотором шаге h в результате численного интегрирования уравнений устойчивой системы можно получить даже незатухающие колебания (рис. 2.38).

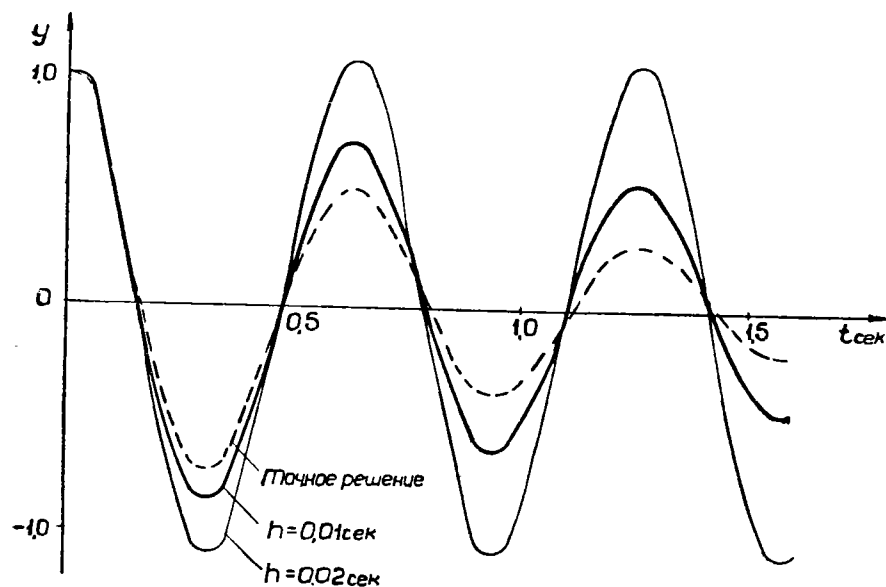


Рис. 2.38. Влияние шага интегрирования на переходный процесс при численном интегрировании уравнения (2.109)

При одинаковом шаге искажение переходного процесса, описываемого уравнением (2.109), тем больше, чем меньше коэффициент демпфирования ξ колебательного процесса при прочих равных условиях (рис. 2.39).

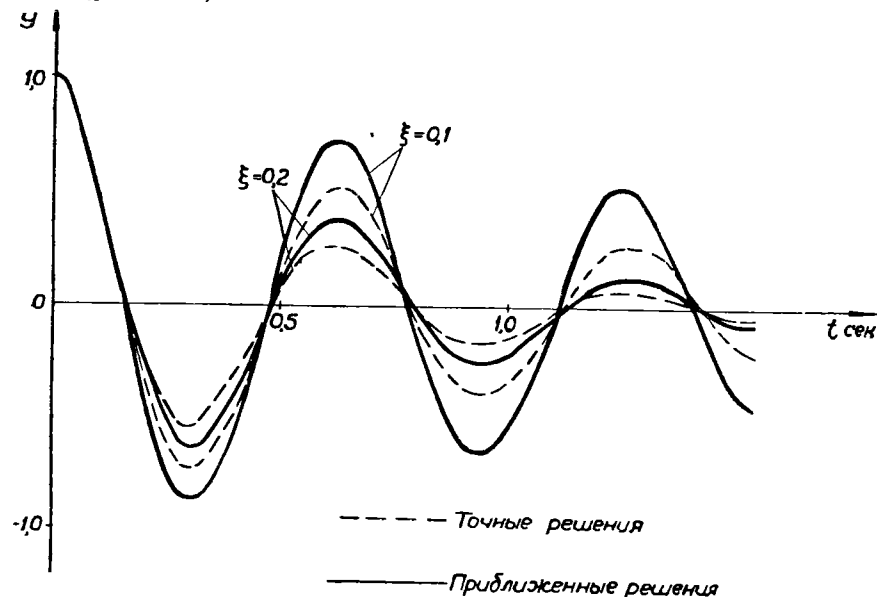


Рис. 2.39. Влияние коэффициента демпфирования на переходный процесс при численном интегрировании уравнения (2.109)

Покажем на примере однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, каким образом необходимо выбирать шаг интегрирования h .

Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Выделим в этом уравнении множитель $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$, характеризующий колебательную составляющую, соответствующую минимальному значению $2\xi T$. Тогда

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)(A_0 p^{n-2} + A_1 p^{n-3} + \dots + A_{n-2}) = 0, \quad (2.110)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$ — постоянные коэффициенты.

Характеристическому уравнению (2.110) соответствуют два дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} T^2 \ddot{y} + 2\xi T \dot{y} + y &= 0 \\ A_0 x^{(n-2)} + A_1 x^{(n-3)} + \dots + A_{n-2} x &= y \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

Решение уравнений можно производить последовательно: сперва решить первое уравнение, т. е. получить $y(t)$, а затем подставить его во второе уравнение и получить $x(t)$.

Для решения первого уравнения методом численного интегрирования приведем его к двум уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{T^2} (2\xi T \dot{y} + y); \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_k &= \dot{y}_{k-1} + h \frac{d\dot{y}_{k-1}}{dt} = \dot{y}_{k-1} - \frac{h}{T^2} (2\xi T \dot{y}_{k-1} + y_{k-1}) \\ y_k &= y_{k-1} + h \frac{dy_{k-1}}{dt} = y_{k-1} + h \dot{y}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

Пользуясь уравнениями (2.112), получаем рекуррентную формулу для определения y_k :

$$y_{k+2} + (2\xi\tau - 2)y_{k+1} + (1 - 2\xi\tau + \tau^2)y_k = 0, \quad (2.113)$$

где $\tau = \frac{h}{T}$.

Решение y_k можно искать в виде

$$y_k = c \beta^k,$$

где c — постоянная величина.

Поставляя y_k в уравнение (2.113), получаем уравнение для β :

$$\beta^2 + (2\xi\tau - 2)\beta + (1 - 2\xi\tau + \tau^2) = 0.$$

Отсюда

$$\beta = 1 - \tau \pm \tau \sqrt{\xi^2 - 1} = 1 - \tau \pm \tau \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Решение y_k будет устойчивым, если модуль величины β будет меньше единицы, т. е. если

$$|\beta| = \sqrt{(1 - \tau)^2 + \tau^2(1 - \xi^2)} = \sqrt{1 - 2\tau + \tau^2} < 1.$$

Решая неравенство, получаем условие устойчивости

$$\tau < 2\xi.$$

Таким образом, при шаге интегрирования h , большем $2\xi T$, интегрирование уравнений методом Эйлера приведет к тому, что заведомо устойчивое решение будет неустойчивым. Следовательно, шаг интегрирования необходимо брать значительно меньше величины $2\xi T$. Практически выбирают $h \leq (0,4 - 1,0) \xi T$ и правильность выбора h проверяют для типовых задач по влиянию дальнейшего уменьшения h на получаемое решение.

Для нелинейных систем и систем с переменными параметрами при выборе h для построения переходных процессов также пользуются соотношением $h < 2\xi T$; параметры T и ξ при этом определяются ориентировочно по примерным значениям частоты и затухания наиболее высокочастотной составляющей колебаний системы.

Если в характеристическом уравнении (2.110) имеется также множитель $T_1 p + 1$ с $T_1 < 2\xi T$, то, как легко показать, решение будет устойчивым при $h < 2T_1$. Практически в этом случае выбирают $h \leq (0,4 - 1,0) \xi T_1$.

Уменьшением шага интегрирования можно получить желаемую точность результата, однако при этом объем вычислительной работы оказывается весьма большим.

Возможность применения метода численного интегрирования значительно расширяется с введением в практику вычислений автоматических быстродействующих цифровых математических машин.

б) Применение автоматических быстродействующих цифровых вычислительных машин

Возможности исследования систем управления значительно расширяются при применении автоматических быстродействующих цифровых вычислительных машин.

Такого рода машины могут выполнять заранее определенную программой последовательность арифметических и логических операций с возможностью изменения порядка операции в зависимости от промежуточных результатов. В машинах предусматривается также возможность выполнения нескольких видов арифметических и логических групповых операций над последовательностями чисел и, кроме того, возможность введения в ходе вычислений элементарных и других функций при помощи заранее установленных стандартных программ. Эти особенности придают машинам широкие логические возможности и гибкую приспособляемость к разнообразным численным

методам решения различных математических задач и делают их универсальными по применению.

Процесс подготовки задач к решению на машине сводится к тому, что дается математически точная и однозначная формулировка задачи, а затем производится составление схемы счета, составление схемы программы, программирование и отладка программы.

Результаты решения выдаются в виде отпечатанных таблиц; в принципе они могут быть получены также в виде графиков.

Машины выгодно использовать для решения тех задач, у которых объем вводимого в машину и выводимого из машины материала относительно невелик, а объем счета на машине велик и составляет от нескольких минут до десятков и сотен часов.

Принципиально возможно обеспечить комплексную механизацию вычислительных работ путем использования машины не только для расчетов отдельных относительно сложных задач, решаемых в значительном количестве вариантов, но также для анализа результатов этих расчетов. Одним из наиболее эффективных способов комплексной механизации вычислений и наиболее полного использования машин является выполнение синтеза систем управления при помощи вычислительной машины. При этом под синтезом понимается выбор функциональной схемы и оптимальных параметров системы, обеспечивающих наилучшим образом требования, накладываемые на систему.

2.3. РАСЧЕТ ОШИБОК

Основной характеристикой качества системы управления является точность ее работы, которая определяется ошибками осуществления системой управления возложенных на нее функций (ошибками системы управления).

Ошибки системы управления возникают за счет:

- 1) неустановления процесса управления (переходного процесса);
- 2) разброса параметров элементов системы;
- 3) случайных воздействий на систему.

Ошибки вследствие неустановления процесса управления (переходного процесса) вычисляются непосредственным построением переходного процесса. Эти ошибки обыкновенно сводят к минимуму путем выбора параметров систем таким образом, чтобы к заданному моменту времени в отсутствие случайных воздействий переходный процесс в системе практически устанавливался.

Ниже даются методы расчета ошибок от разброса параметров системы и случайных воздействий. Вначале приводятся основные сведения, необходимые для расчета ошибок и вычисления вероятностей.

1. Сведения из теории вероятностей

а) Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей является наукой о закономерностях случайных явлений.

Математические законы теории вероятностей — результат абстра-

гирования реальных статистических законов, объективно существующих в массовых случайных явлениях природы.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие «событие». Под событием понимается всякий факт, который в результате эксперимента может произойти или не произойти.

Пусть при неизменном комплексе исходных условий имеет место многократное повторение какого-либо эксперимента. Наблюдая за результатами каждого эксперимента, можно зафиксировать факт появления или не появления события. Рассмотрение результатов экспериментов показывает, что число появлений или не появлений события подчиняется при достаточно большом числе экспериментов устойчивой закономерности.

Если при n независимых экспериментах какое-либо событие A появилось m раз, то отношение $\frac{m}{n}$ называется частотой появления рассматриваемого события. Частоту события часто называют его статистической вероятностью.

При малом числе n экспериментов частота появления события носит более или менее случайный характер. Однако при достаточно большом числе n частота событий все более теряет свой случайный характер, проявляя тенденцию стабилизироваться с незначительными колебаниями относительно некоторой средней постоянной величины.

Частота события, являющаяся опытным практическим понятием, теснейшим образом связана с понятием вероятности события.

Вероятностью события A называют численную меру степени объективной возможности этого события и обозначают через $P(A)$.

В теории вероятностей события разделяются по степени их возможности в эксперименте.

Несколько событий называются равновероятными в данном эксперименте, если по условиям симметрии имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое.

Несколько событий называются единственно возможными в данном эксперименте, если в результате его должно появиться хотя бы одно из событий.

Несколько событий называются несовместными в данном эксперименте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Два события называются противоположными, если они единственно возможные и несовместные.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Событие называется достоверным, если в данном эксперименте оно непременно должно произойти.

Событие называется невозможным, если в данном эксперименте оно не может произойти.

В теории вероятностей часто приходится иметь дело не с достоверными и невозможными событиями, а с практически достоверными и практически невозможными событиями.

Практически достоверным событием называется событие, вероятность которого близка к единице.

Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого близка к нулю.

Для сравнения различных событий по степени их возможности, т. е. по вероятности, принимают вероятность достоверного события за единицу, а вероятность невозможного события за нуль.

Таким образом, вероятность какого-либо события A может находиться в пределах от нуля до единицы:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Из определений частоты и вероятности события следует, что вероятность события равна величине, к которой приближается частота события при увеличении числа экспериментов.

Вероятность события в некоторых случаях может быть вычислена непосредственно. Например, если несколько различных событий при эксперименте являются объективно одинаково возможными, то вероятность каждого события равна единице, деленной на число возможных событий.

Однако в большинстве случаев для определения вероятностей событий применяются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий определить вероятность других, более сложных, с ними связанных событий.

Теория вероятностей представляет собой систему таких косвенных методов, пользование которыми позволяет свести необходимый эксперимент к минимуму.

В основе этих методов лежат две теоремы: теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей.

Согласно теореме сложения вероятность появления какого-либо одного события из нескольких несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n равна сумме вероятностей $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ этих событий. Таким образом,

$$P(A_1, \text{ или } A_2, \dots, \text{ или } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Если же эти события являются к тому же еще и единственно возможными, то

$$P(A_1, \text{ или } A_2, \dots, \text{ или } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1,$$

следовательно, событие $(A_1, \text{ или } A_2, \dots, \text{ или } A)$ в этом случае является достоверным.

Так как два противоположных события A и \bar{A} являются единственно возможными и несовместными, то

$$P(A \text{ или } \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

т. е. вероятность одного из противоположных событий равна единице минус вероятность другого события.

Согласно теореме умножения вероятность совместного выполнения двух событий A и B равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A)P_A(B)$$

или

$$P(A \text{ и } B) = P(B)P_B(A).$$

Вероятность $P_B(A)$ события A , вычисленная при условии, что имело место событие B , и вероятность $P_A(B)$ события B , вычисленная при условии, что имело место событие A , называются условными вероятностями.

Если события A и B являются независимыми, то

$$P(A \text{ и } B) = P(A)P(B).$$

Вероятность совместного выполнения нескольких независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n равна произведению вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A_1, \text{ и } A_2, \dots, \text{ и } A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

б) Случайные величины

Случайной величиной X называется величина, которая в результате эксперимента может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Полной характеристикой случайной величины X служит ее закон распределения вероятностей, устанавливающий связь между значением x , которое может принять случайная величина X , и вероятностью того, что величина X примет это значение.

Наиболее удобной характеристикой случайной величины является вероятность неравенства $X < x$. Вероятность этого неравенства, очевидно, зависит от x , т. е. является некоторой функцией x . Эта функция называется интегральным законом распределения случайной величины X и обозначается через $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.114)$$

Интегральный закон распределения есть универсальная характеристика случайной величины. Она существует не только для непрерывных случайных величин, но и для прерывистых.

Функция $F(x)$ является положительной неубывающей функцией, причем $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.

Вероятность того, что случайная величина X находится в пределах $a < X < b$, равна

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (2.115)$$

Действительно, вероятность того, что $X < b$, равна сумме вероятностей того, что $X < a$ и $a < X < b$, так как события $X < a$ и $a < X < b$ являются несовместными событиями. Следовательно,

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$$

или

$$F(b) = F(a) + P(a < X < b).$$

Отсюда имеем

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Определим вероятность того, что X лежит в пределах

$$x < X < x + \Delta x.$$

Она будет равна

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Средняя плотность вероятности того, что величина X находится в указанных пределах, равна

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \rightarrow F'(x).$$

Обозначим $F'(x) = f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют плотностью вероятности или дифференциальным законом распределения случайной величины X .

Плотность вероятности $f(x)$, как производная неубывающей функции $F(x)$, больше нуля и может принимать сколь угодно большие положительные значения; при наличии скачков в функции $F(x)$, например для прерывистой случайной величины, плотность вероятности может обращаться в бесконечность.

Интегральный закон распределения выражается через дифференциальный закон следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.116)$$

Функция $F(x)$ или $f(x)$ полностью характеризует случайную величину X . Однако при изучении случайных величин часто бывает достаточно знать не закон распределения случайной величины, а числовые характеристики ее.

В теории вероятностей эти числовые характеристики и операции с ними играют важную роль; очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя только с одними числовыми характеристиками. При этом имеет большое значение то обстоятельство, что когда имеется большое количество случайных величин, каждая из которых оказывает известное влияние на числовой результат эксперимента, то независимо от законов распределения отдельных случайных величин можно считать, что результат эксперимента подчиняется так называемому нормальному закону распределения.

При определении числовых характеристик случайной величины пользуются понятием о математическом ожидании.

Математическим ожиданием или средним значением случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений.

Математическое ожидание обозначается $M[X]$, \bar{x} или m_x .

Пользуясь дифференциальным законом распределения случайной величины, можно записать

$$M[X] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.117)$$

В качестве числовых характеристик случайной величины применяются так называемые моменты. Моменты бывают двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k \quad M[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины X от ее математического ожидания, или, что то же, от ее среднего значения:

$$\mu_k = M[(X - \bar{x})^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k f(x) dx.$$

Для получения центральных моментов можно воспользоваться характеристической функцией $\Theta(\xi)$, представляющей собой функцию, комплексно сопряженную с преобразованием Фурье дифференциального закона распределения $f(x)$. Если принять, что $x=0$, то

$$\Theta(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\xi x} dx;$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\xi) e^{-j\xi x} d\xi.$$

Непосредственным дифференцированием $\Theta(\xi)$ по ξ легко убедиться, что

$$\frac{d^k \Theta(\xi)}{d\xi^k} = (j)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) e^{j\xi x} dx.$$

Полагая $\xi=0$, получаем

$$\left[\frac{d^k \Theta(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} = (j)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = (j)^k \mu_k.$$

Отсюда

$$\mu_k = (-j)^k \left[\frac{d^k \Theta(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0}.$$

Легко видеть, что начальный момент первого порядка дает математическое ожидание или среднее значение случайной величины X , а начальный момент второго порядка дает среднее значение квадрата случайной величины.

Первый центральный момент равен нулю. Второй центральный момент называется дисперсией случайной величины и обозначается $D[X]$:

$$D[X] = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx. \quad (2.118)$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания, разбросанности значений случайной величины относительно ее среднего значения.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины; для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины; поэтому вводят понятие среднего квадратического отклонения случайной величины, которое обозначают через

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (2.119)$$

Математическое ожидание и дисперсия (или среднее квадратическое отклонение) — наиболее простые и часто применяемые числовые характеристики случайной величины, характеризующие в ряде случаев закон распределения. Для более подробного описания распределения применяются моменты высших порядков.

Центральный момент третьего порядка μ_3 служит для характеристики асимметрии или скошенности распределения. Отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического значения называют асимметрией и обозначают через Sk :

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Центральный момент четвертого порядка μ_4 служит для характеристики так называемой «крутости», т. е. остро- или туповершинности кривой дифференциального закона распределения. Эти свойства распределения описываются с помощью специальной характеристики — эксцесса. Эксцессом распределения называется величина

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Для нормального закона распределения асимметрия и эксцесс равны нулю.

Помимо указанных выше числовых характеристик, применяются и другие характеристики: среднее арифметическое и вероятное отклонения.

Средним арифметическим отклонением η_x называется математическое ожидание абсолютного значения случайной величины $X - \bar{x}$:

$$\eta_x = M[|X - \bar{x}|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}| f(x) dx. \quad (2.120)$$

Вероятным отклонением называется такое отклонение E_x случайной величины X , для которого выполняется условие

$$P(|X - \bar{x}| < E_x) = \frac{1}{2}. \quad (2.121)$$

Согласно этому условию вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее среднего значения \bar{x} будет меньше вероятного E_x , равна половине.

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся законы распределения случайных величин.

1) Нормальный закон распределения. Нормальный закон распределения, часто называемый законом Гаусса, играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Этот закон распределения — наиболее часто встречающийся на практике. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются законы распределения случайных величин при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Можно доказать, что сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем больше этих случайных величин. Так как в большинстве случаев встречающиеся на практике случайные величины могут быть представлены как суммы весьма большого числа сравнительно малых слагаемых, каждое из которых связано с действием отдельной причины, не зависящей от остальных, то можно считать их подчиняющимися нормальному закону распределения.

Кривая дифференциального нормального закона распределения представлена на рис. 2.40.

Дифференциальный нормальный закон распределения выражается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.122)$$

где a — математическое ожидание или среднее значение случайной величины X ;

σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

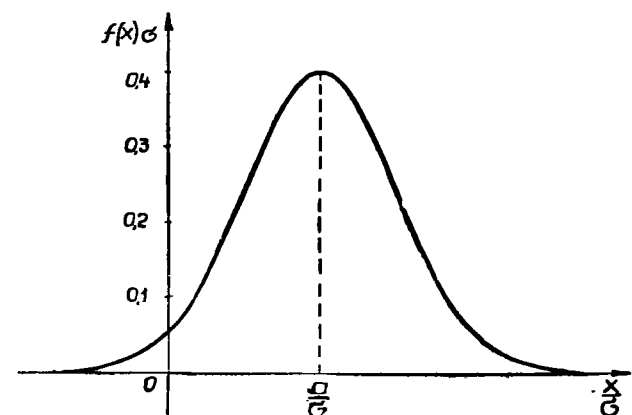


Рис. 2.40. Дифференциальный нормальный закон распределения

Интегральный нормальный закон распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Для вычисления этого интеграла обычно пользуются табличной функцией, которая изображена на рис. 2.41, называемой интегралом вероятности

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi. \quad (2.123)$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \right]. \quad (2.124)$$

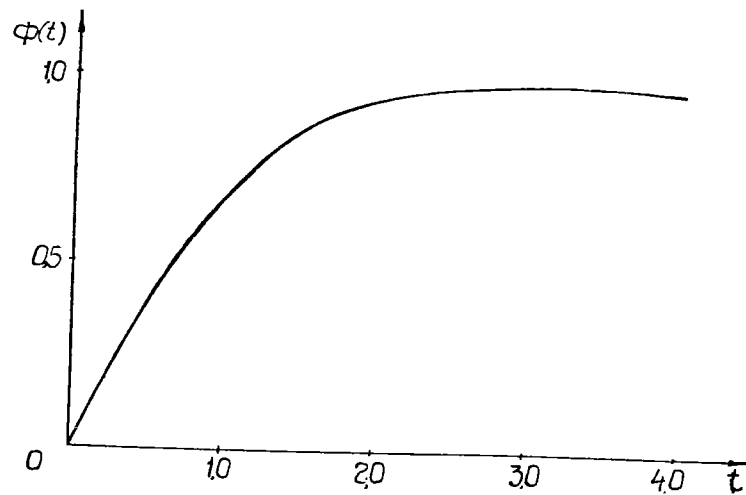


Рис. 2.41. Интеграл вероятности

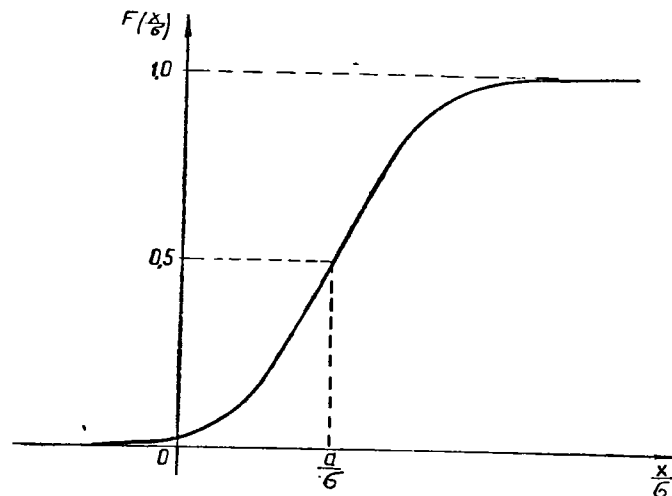


Рис. 2.42. Интегральный нормальный закон распределения

Функция $F(x)$ в зависимости от $\frac{x}{\sigma}$ представлена на рис. 2.42.

Для нормального закона распределения все нечетные центральные моменты равны нулю, а четные равны соответственно

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \sigma^2; \\ \mu_4 &= 3\sigma^4; \\ \mu_6 &= 15\sigma^6; \\ &\dots\end{aligned}$$

Асимметрия и эксцесс для нормального закона распределения равны нулю.

Вероятное отклонение

$$E \approx 0,675 \sigma.$$

Среднее арифметическое отклонение

$$\eta \approx 0,798 \sigma.$$

Вероятность нахождения случайной величины X в пределах от α до β равна

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \right]. \quad (2.125)$$

2) Равновероятный закон распределения. Равновероятный закон распределения имеет место в тех случаях, когда значения случайной величины X возможны в каких-то определенных пределах и в этих пределах значения ее равновероятны

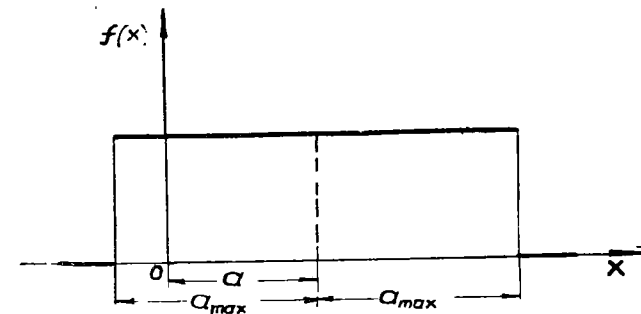


Рис. 2.43. Дифференциальный равновероятный закон распределения

Кривая дифференциального равновероятного закона распределения представлена на рис. 2.43.

Дифференциальный закон выражается функцией

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{при } x < a - a_{\max} \\ f(x) &= \frac{1}{2a_{\max}} && \text{при } a - a_{\max} < x < a + a_{\max} \\ f(x) &= 0 && \text{при } x > a + a_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

где a — математическое ожидание или среднее значение случайной величины X ;

a_{\max} — максимально возможное отклонение случайной величины X от своего среднего значения a .

Интегральный закон распределения выражается функцией

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{при } x \leq a - a_{\max} \\ F(x) &= \frac{1}{2a_{\max}} (x + a_{\max} - a) && \text{при } a - a_{\max} \leq x \leq a + a_{\max} \\ F(x) &= 1 && \text{при } x \geq a + a_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Интегральный закон распределения $F(x)$ для рассмотренного случая представлен на рис. 2.44.

Для равновероятного закона распределения все нечетные центральные моменты равны нулю, а четные центральные моменты равны соответственно

$$\mu_2 = \frac{a_{\max}^2}{3};$$

$$\mu_4 = \frac{a_{\max}^4}{5};$$

$$\mu_6 = \frac{a_{\max}^6}{6}.$$

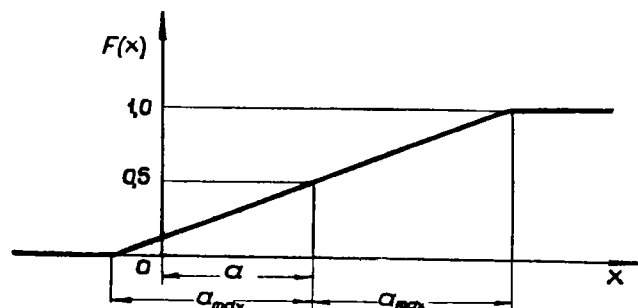


Рис. 2.44. Интегральный равновероятный закон распределения

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \frac{a_{\max}}{\sqrt{3}} \approx \frac{a_{\max}}{1,73}.$$

Вероятное отклонение

$$E = \frac{a_{\max}}{2}.$$

Среднее арифметическое отклонение равно вероятному

$$\tau_1 = E = \frac{a_{\max}}{2}.$$

Асимметрия для равновероятного закона распределения равна нулю. Эксцесс равновероятного закона распределения, как менее островершинного, чем нормальный, отрицателен и равен

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{9}{5} - 3 = -\frac{6}{5}.$$

3) Нормальный закон распределения ограниченной величины. Нормальный закон распределения ограниченной величины встречается в тех случаях, когда рассматриваемая

случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, контролируется.

Например, при изготовлении каких-либо приборов производится их контроль; приборы с большими отклонениями параметров от номинальных значений бракуются. Если при этом разброс параметров прибора зависит от многих причин, т. е. подчиняется нормальному закону распределения, то после контроля (браковки) закон распределения разброса параметров становится уже не нормальным, а измененным нормальным законом распределения ограниченной величины.

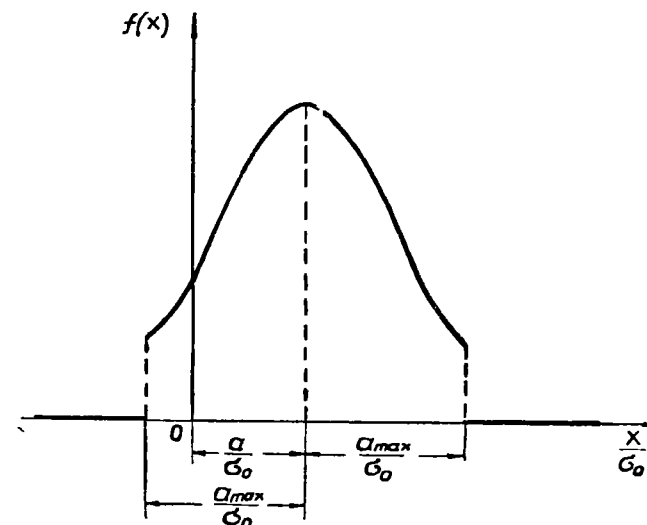


Рис. 2.45. Дифференциальный нормальный закон распределения ограниченной случайной величины

Общий вид кривой дифференциального нормального закона распределения ограниченной величины представлен на рис. 2.45.

Дифференциальный нормальный закон распределения ограниченной величины выражается функцией

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0 & \text{при } x < a - a_{\max} \\ f(x) &= \frac{1}{1-q} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}} & \text{при } a - a_{\max} < x < a + a_{\max} \\ f(x) &= 0 & \text{при } x > a + a_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

где a — математическое ожидание или среднее значение случайной величины X ;

σ_0 — среднее квадратическое отклонение неограниченной случайной величины (случайной величины X до контроля);

a_{\max} — максимальное отклонение ограниченной случайной величины;

q — вероятность превышения абсолютных значений отклонения случайной величины X значения a_{\max} .

Величина q и максимальное отклонение a_{\max} ограниченной случайной величины X связаны соотношением

$$q = 1 - \Phi\left(\frac{a_{\max}}{\sigma_0}\right), \quad (2.129)$$

где $\Phi\left(\frac{a_{\max}}{\sigma_0}\right)$ — интеграл вероятности.

Интегральный нормальный закон распределения ограниченной величины

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{при } x \leq a - a_{\max} \\ F(x) &= \frac{1}{1-q} \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{a_{\max}}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_0}\right) \right] && \text{при } a - a_{\max} \leq x \leq a + a_{\max} \\ F(x) &= 1 && \text{при } x \geq a + a_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.130)$$

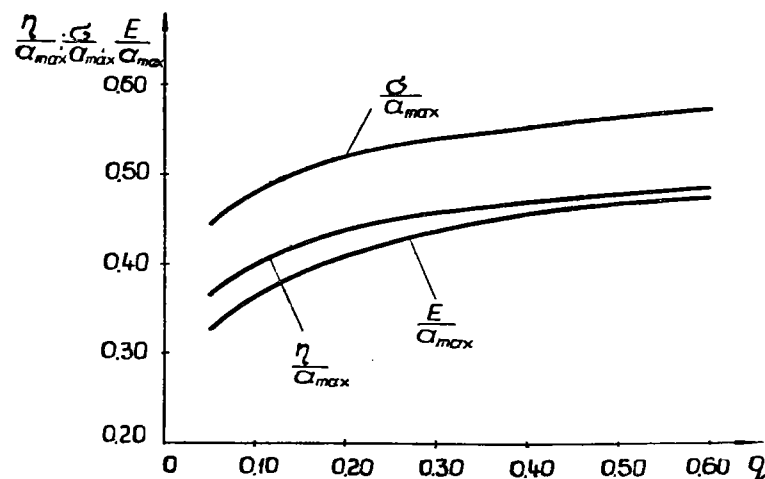


Рис. 2.46. Отношение среднего квадратического отклонения σ , вероятного отклонения E и среднего арифметического отклонения η к максимальному значению a_{\max} случайной ограниченной величины в зависимости от q

На рис. 2.46 представлены отношения среднего квадратического отклонения σ , вероятного отклонения E и среднего арифметического отклонения η к максимальному значению a_{\max} ограниченной величины в зависимости от q .

Помимо закона распределения случайной величины, в некоторых случаях необходимо знать закон распределения функций от нее.

Пусть Y является функцией случайной величины X :

$$Y = \varphi(X). \quad (2.131)$$

Обозначим

$f_1(x)$ и $F_1(x)$ — дифференциальный и интегральный законы распределения случайной величины X ;

$f_2(y)$ и $F_2(y)$ — дифференциальный и интегральный законы распределения функции случайной величины $Y = \varphi(X)$.

Интегральный закон распределения случайной величины Y согласно определению равен

$$F_2(y) = P(Y < y). \quad (2.132)$$

Подставляя (2.131) в (2.132), получаем

$$F_2(y) = P[\varphi(X) < y].$$

Вероятность выполнения неравенства $\varphi(X) < y$ равна вероятности того, что X будет удовлетворять этому неравенству, т. е. вероятности того, что X будет принимать значения, при которых выполняется неравенство $\varphi(X) < y$.

Отсюда получаем выражение для интегрального закона распределения функции случайной величины:

$$F_2(y) = \int_L f_1(x) dx, \quad (2.133)$$

где L — интервал значений x , для которых $\varphi(X) < y$ (интеграл берется по всем x , удовлетворяющим этому неравенству).

Так, например, если

$$Y = X^2,$$

то интеграл (2.133) следует брать по значениям x , удовлетворяющим неравенству $x^2 < y$, или, что то же самое, $-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$. Следовательно, для этого случая

$$F_2(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_1(x) dx.$$

Дифференциальный закон распределения функции случайной величины можно определить через интегральный закон, как

$$f_2(y) = F'_2(y). \quad (2.134)$$

На практике часто приходится встречаться не с одной случайной величиной, а с системой случайных величин, например с двумя и более случайными величинами.

Рассмотрим две случайные величины X и Y .

Интегральным законом распределения двух случайных величин называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P[(X < x) \text{ и } (Y < y)]. \quad (2.135)$$

Вероятность того, что возможные значения случайных величин X и Y находятся в пределах $(x, x+dx)$ и $(y, y+dy)$, определяется выражением

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy = f(x, y) dx dy.$$

Функция $f(x, y)$ представляет собой двумерную плотность вероятности случайных величин X и Y и называется их дифференциальным законом распределения.

Связь между интегральным и дифференциальным законами распределения выражается следующим образом:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (2.136)$$

Отсюда очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1.$$

Если в интегральном законе распределения двух случайных величин положить один из аргументов равным бесконечности, то получится интегральный закон другой случайной величины. Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} F(x, \infty) = F_1(x) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \\ F(\infty, y) = F_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

Отсюда легко получить дифференциальные законы распределения величин X и Y через дифференциальный закон распределения системы величин X и Y :

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) = F'_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ f_2(y) = F'_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

Изучая системы случайных величин, необходимо характеризовать связь, зависимость между этими величинами.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

Для независимых случайных величин

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

В качестве числовых характеристик системы двух случайных величин, как и для одной случайной величины, используются начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k, s системы случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения k -й степени X на s -ю степень Y :

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy.$$

Для независимых случайных величин

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f_1(x) f_2(y) dx dy = M[X^k] M[Y^s].$$

Таким образом, начальный момент порядка k, s независимых случайных величин X и Y равен произведению момента порядка k величины X на момент порядка s величины Y .

Полагая $k=1$ и $s=0$ и, наоборот, $k=0$ и $s=1$, получаем математические ожидания случайных величин X и Y .

Центральным моментом порядка k, s называется величина

$$\mu_{k,s} = M[(X - \bar{x})^k (Y - \bar{y})^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k (y - \bar{y})^s f(x, y) dx dy.$$

Для определения центральных моментов совокупности двух случайных величин можно ввести, так же как и в случае одной величины, характеристическую функцию $\Theta(\xi, \gamma)$, которая при $\bar{x} = \bar{y} = 0$ определяется выражением

$$\Theta(\xi, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\xi x + \gamma y)} f(x, y) dx dy,$$

причем

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\xi, \gamma) e^{-j(\xi x + \gamma y)} d\xi d\gamma.$$

В этом случае центральный момент $\mu_{k,s}$ будет равен

$$\mu_{k,s} = (-j)^{k+s} \left. \frac{\partial^{k+s} \Theta(\xi, \gamma)}{\partial \xi^k \partial \gamma^s} \right|_{\xi = \gamma = 0}.$$

Из центральных моментов наибольшую роль играют моменты $\mu_{2,0}$ и $\mu_{0,2}$ (т. е. дисперсии величин X и Y) и момент $\mu_{1,1}$, называемый корреляционным моментом или моментом связи R_{xy} :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{2,0} &= M[(X - \bar{x})^2] = D[X] = \sigma_x^2 \\ \mu_{0,2} &= M[(Y - \bar{y})^2] = D[Y] = \sigma_y^2 \\ \mu_{1,1} &= M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = R_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

Момент связи системы двух случайных величин R_{xy} может в некоторой мере служить характеристикой степени зависимости или «связанности» этих величин.

Безразмерное отношение

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})]}{\sqrt{M[(X - \bar{x})^2] M[(Y - \bar{y})^2]}} \quad (2.140)$$

называется коэффициентом корреляции.

Если r_{xy} отличен от нуля, то случайные величины X и Y называются связанными или коррелированными.

Если r_{xy} равен нулю, то величины X и Y называются несвязанными или некоррелированными.

Коэффициент корреляции r_{xy} может быть как положительным, так и отрицательным, но по абсолютной величине не может превышать единицы.

Положительная корреляция между случайными величинами означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем тоже возрастать; отрицательная корреляция означает, что при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем убывать.

Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю, т. е. независимые величины некоррелированы. Однако некоррелированные случайные величины могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент являются простейшими характеристиками совокупности двух случайных величин.

Дифференциальный нормальный закон распределения совокупности двух случайных величин X и Y

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)} \left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

Математические ожидания $\bar{x}=a_x$ и $\bar{y}=a_y$, дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 и корреляционный момент R_{xy} , или коэффициент корреляции r_{xy} , полностью характеризуют эту совокупность.

Пользуясь корреляционным моментом, можно определить дисперсию суммы двух случайных величин:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2R_{xy}.$$

Дифференциальный закон распределения $f_z(z)$ суммы $Z=X+Y$ двух случайных независимых величин X и Y определяется через дифференциальные законы распределения $f_x(x)$ и $f_y(y)$ каждой из величин по соотношению

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(z-x) f_x(x) dx.$$

Действительно:

$$f_z(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z < Z < z + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z < X+Y < z + \Delta z)}{\Delta z}.$$

Вероятность $P(z < X+Y < z + \Delta z)$ равна вероятности того, что X и Y находятся в области D , удовлетворяющей условию $z < X+Y < z + \Delta z$.

Следовательно:

$$f_z(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_D f_x(x) f_y(y) dx dy}{\Delta z}.$$

Далее:

$$\iint_D f_x(x) f_y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \left[\int_{z-x}^{z-x+\Delta z} f_y(y) dy \right] dx.$$

Таким образом:

$$f_z(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \left[\int_{z-x}^{z-x+\Delta z} f_y(y) dy \right] dx}{\Delta z} = \\ = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) [f_y(z-x) \Delta z] dx}{\Delta z} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx.$$

Аналогичным образом можно рассматривать и системы, состоящие из большего числа случайных величин.

в) Случайные функции

Случайной функцией $X(t)$ называется функция аргумента t , которая в результате эксперимента может принять тот или иной конкретный вид, причем заранее неизвестно, какой именно.

При любом фиксированном значении аргумента t случайная функция $X(t)$ представляет собой обычную случайную величину. Эта случайная величина имеет закон распределения, который в общем случае может зависеть от выбранного фиксированного значения аргумента t .

Обозначим дифференциальный закон распределения случайной функции $X(t)$ через $f(x, t)$.

Закон распределения $f(x, t)$ не характеризует полностью случайную функцию $X(t)$, так как он не определяет зависимости между значениями $X(t)$ при различных значениях t . С этой точки зрения более полной характеристикой случайной функции были бы n -мерные законы распределения функции $X(t)$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n),$$

устанавливающие закон распределения системы n случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ при любых значениях t_1, t_2, \dots, t_n .

С громоздкими характеристиками, зависящими от многих аргументов, оперировать чрезвычайно неудобно, поэтому при рассмотрении случайных функций обычно ограничиваются рассмотрением характеристик, аналогичных числовым характеристикам случайных величин; к ним относятся математическое ожидание и дисперсия случайной функции.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $\bar{x}(t)$, значение которой для каждого t_i равно математическому ожиданию случайной величины $X(t_i)$:

$$\bar{x}(t) = M[X(t)]. \quad (2.141)$$

Математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя функция, вокруг которой различным образом варьируются конкретные случайные функции.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D(t)$, значение которой для каждого t_i равно дисперсии случайной величины $X(t_i)$:

$$D(t) = D[X(t)]. \quad (2.142)$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной функции недостаточны для описания основных особенностей случайной функции, так же как математические ожидания и дисперсии двух величин, входящих в систему, недостаточны для характеристики системы.

Для характеристики степени связанности значений случайной функции $X(t)$ при различных значениях t служит корреляционная функция

$$R(t_1, t_2) = M[\{X(t_1) - \bar{x}(t_1)\} \{X(t_2) - \bar{x}(t_2)\}]. \quad (2.143)$$

При $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция становится равной дисперсии случайной функции:

$$R(t, t) = M[\{X(t) - \bar{x}(t)\}^2] = D(t). \quad (2.144)$$

Часто вместо $R(t_1, t_2)$ пользуются нормированной корреляционной функцией

$$r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sqrt{D(t_1) D(t_2)}}. \quad (2.145)$$

Во многих случаях знание величин $\bar{x}(t)$ и $R(t_1, t_2)$ или $\bar{x}(t)$, $r(t_1, t_2)$ и $D(t)$ достаточно для характеристики случайной функции.

Простейшей случайной функцией является произведение случайной величины X на некоторую неслучайную функцию $\varphi(t)$:

$$X(t) = X\varphi(t), \quad (2.146)$$

т. е. случайная функция, у которой случайным является не вид ее, а только масштаб; закон распределения $X(t)$ и X один и тот же.

Математическое ожидание такой простейшей функции

$$\bar{x}(t) = M[X(t)] = \bar{x}\varphi(t),$$

где \bar{x} — математическое ожидание случайной величины X ;
■ Корреляционная функция

$$R(t_1, t_2) = \bar{x}^2 \varphi(t_1) \varphi(t_2);$$

дисперсия

$$D(t) = R(t, t) = \bar{x}^2 \varphi^2(t),$$

где σ_x — среднее квадратическое отклонение случайной величины X ;
нормированная корреляционная функция

$$r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sqrt{D(t_1) D(t_2)}} = 1.$$

Это означает, что значения рассматриваемой случайной функции при различных t полностью связаны. Действительно, характер изменения случайной функции по времени определяется неслучайной функцией $\varphi(t)$, т. е. является вполне определенным.

Можно показать, что любая случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде суммы математического ожидания $\bar{x}(t)$ и взаимно некоррелированных простейших функций $X_v \varphi_v(t)$ рассмотренного выше вида с нулевым математическим ожиданием. Такое представление называется каноническим разложением случайной функции $X(t)$:

$$X(t) = \bar{x}(t) + \sum_v X_v \varphi_v(t). \quad (2.147)$$

Корреляционная функция $R(t_1, t_2)$ в этом случае может быть записана в виде

$$R(t_1, t_2) = \sum_v D[X_v] \varphi_v(t_1) \varphi_v(t_2). \quad (2.148)$$

Отсюда видно, что если известны математическое ожидание и корреляционная функция, записанная указанным выше образом, то легко может быть получено каноническое разложение случайной функции.

Случайные функции в целом ряде задач носят характер так называемого стационарного случайного процесса.

Как указывалось выше, в большинстве случаев достаточно знать математическое ожидание случайной функции и ее корреляционную функцию. При этом под стационарной случайной функцией можно понимать случайную функцию $X(t)$, для которой математическое

ожидание $\bar{x}(t)$ постоянно, а корреляционная функция $R(t_1, t_2)$ зависит только от разности аргументов $t_1 - t_2$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x} = \text{const} \\ R(t_1, t_2) &= R(t_1 - t_2) = R(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.149)$$

где

$$\tau = t_1 - t_2.$$

Корреляционная функция $R(\tau)$ является четной функцией τ .

Дисперсия стационарной случайной функции также постоянна и равна

$$D[X(t)] = R(t, t) = R(0). \quad (2.150)$$

Нормированная корреляционная функция

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}. \quad (2.151)$$

Стационарные случайные функции при весьма общих условиях обладают одним важным свойством: математическое ожидание и корреляционная функция стационарной случайной функции могут быть с любой степенью точности заменены своими средними значениями на достаточно большом интервале T изменения аргумента t .

Это свойство, называемое обычно эргодическим свойством стационарных случайных функций, дает возможность определять математическое ожидание и корреляционную функцию стационарной случайной функции по одной экспериментальной записи случайной функции.

В соответствии с эргодическим свойством стационарных случайных функций

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= M[X(t)] \approx \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \\ R(\tau) &= M[\{X(t) - \bar{x}\} \{X(t + \tau) - \bar{x}\}] \approx \\ &\approx \frac{1}{T} \int_0^T \{X(t) - \bar{x}\} \{X(t + \tau) - \bar{x}\} dt \end{aligned} \right\} \quad (2.152)$$

Если среднее значение стационарной случайной функции равно нулю, то

$$R(\tau) = M[X(t) X(t + \tau)] \approx \frac{1}{T} \int_0^T X(t) X(t + \tau) dt,$$

а дисперсия стационарной случайной функции равна среднему значению ее квадрата. Действительно,

$$D[X(t)] = R(0) \approx \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt.$$

Как всякая непрерывная функция, корреляционная функция $R(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ может быть представлена совпадающей с ней в интервале $-T \leq \tau < T$ периодической корреляционной функцией $R_T(\tau)$. Так как корреляционная функция является четной функцией, то

$$R_T(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_{\nu} \cos \omega_{\nu} \tau, \quad (2.153)$$

где

$$\omega_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{2T}.$$

Коэффициенты ряда определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau \\ \Delta_{\nu} &= \frac{2}{T} \int_0^T R(\tau) \cos \omega_{\nu} \tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.154)$$

где $\nu = 1, 2, \dots$, и являются неслучайными величинами.

Корреляционная функция $R_T(\tau)$ может быть записана в виде

$$R_T(\tau) = R_T(t_1 - t_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_{\nu} (\cos \omega_{\nu} t_1 \cos \omega_{\nu} t_2 + \sin \omega_{\nu} t_1 \sin \omega_{\nu} t_2). \quad (2.155)$$

Отметим, что при изменениях t_1 и t_2 в интервале $(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2})$ величина $\tau = t_1 - t_2$ изменяется в интервале $(-T; T)$.

Корреляционная функция $R(\tau)$ является пределом корреляционной функции $R_T(\tau)$ при $T \rightarrow \infty$:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau). \quad (2.156)$$

Сравнивая разложение корреляционной функции с выражением (2.148), получим каноническое разложение случайной функции $X_T(t)$, совпадающей в интервале $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ со случайной функцией $X(t)$:

$$X_T(t) = \bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (B_{\nu} \cos \omega_{\nu} t + C_{\nu} \sin \omega_{\nu} t), \quad (2.157)$$

где B_{ν} и C_{ν} — взаимно некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю. Величины B_{ν} и C_{ν} с одинаковым номером ν имеют одну и ту же дисперсию Δ_{ν} .

Каноническое разложение случайной функции представляет собой по сути дела разложение ее в ряд Фурье. Так как функция $X_T(t)$, раскладываемая в ряд Фурье, является случайной функцией, то и коэффициенты этого разложения B_{ν} и C_{ν} также являются случайными величинами.

Из канонического разложения случайной функции видно, что Δ_ν является дисперсией ν -й гармоники $X_\nu(t) = B_\nu \cos \omega_\nu t + C_\nu \sin \omega_\nu t$ случайной функции $X_T(t)$.

Действительно:

$$\begin{aligned} D[X_\nu(t)] &= D[B_\nu \cos \omega_\nu t + C_\nu \sin \omega_\nu t] = \\ &= M[B_\nu^2 \cos^2 \omega_\nu t + 2B_\nu C_\nu \cos \omega_\nu t \sin \omega_\nu t + C_\nu^2 \sin^2 \omega_\nu t] = \\ &= M[B_\nu^2] \cos^2 \omega_\nu t + M[C_\nu^2] \sin^2 \omega_\nu t = \Delta_\nu. \end{aligned} \quad (2.158)$$

При достаточно большом периоде T дисперсия Δ_ν будет малой величиной.

Дисперсия $D[X_T(t)]$ случайной функции $X_T(t)$ получается как сумма дисперсий Δ_ν всех ее отдельных гармоник:

$$\begin{aligned} D[X_T(t)] &= M[(X_T(t) - \bar{x})^2] = \\ &= M\left\{\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (B_\nu \cos \omega_\nu t + C_\nu \sin \omega_\nu t)\right]^2\right\} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \{M[B_\nu^2] \cos^2 \omega_\nu t + M[C_\nu^2] \sin^2 \omega_\nu t\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Введем функцию $G_T(\omega_\nu)$, которую определим следующим равенством:

$$\text{где} \quad \Delta_\nu = G_T(\omega_\nu) \Delta\omega, \quad (2.160)$$

$$\Delta\omega = \omega_{\nu+1} - \omega_\nu = \frac{2\pi}{2T}. \quad (2.161)$$

Так как Δ_ν является дисперсией ν -й гармоники $X_\nu(t)$, то $G_T(\omega_\nu)$ можно назвать средней энергетической спектральной плотностью ν -й гармоники стационарной случайной функции:

$$G_T(\omega_\nu) = \frac{\Delta_\nu}{\Delta\omega} = \frac{2T}{2\pi} \Delta_\nu, \quad (2.162)$$

или согласно (2.154)

$$G_T(\omega_\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^T R(\tau) \cos \omega_\nu \tau d\tau. \quad (2.163)$$

Пользуясь связью коэффициентов ряда Фурье Δ_ν корреляционной функции $R_T(\tau)$ со средней спектральной плотностью $G_T(\omega_\nu)$ согласно (2.153), получаем

$$R_T(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_T(\omega_\nu) \cos \omega_\nu \tau \Delta\omega. \quad (2.164)$$

Переходя в формулах (2.163) и (2.164) к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ R(\tau) &= \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.165)$$

Функция $G(\omega)$ является энергетической спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$. В дальнейшем $G(\omega)$ будем называть просто спектральной плотностью. Спектральная плотность всегда положительна и представляет собой плотность дисперсии гармоник случайной функции $X(t)$ при данной частоте ω .

Иногда ω заменяют частотой $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} G(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \\ R(\tau) &= 2\pi \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau df \end{aligned} \right\} \quad (2.166)$$

Дисперсия $D[X(t)]$, или среднее квадратическое отклонение σ_x случайной функции $X(t)$, определяется через значение корреляционной функции $R(\tau)$ при $\tau=0$.

Отсюда

$$D[X(t)] = \sigma_x^2 = R(0) = \left[\int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega \right]_{\tau=0}$$

или

$$D[X(t)] = \sigma_x^2 = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (2.167)$$

Это же соотношение может быть получено из выражения (2.159) после подстановки в него значения Δ_ν из (2.160) и перехода к пределу при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} D[X_T(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} G_T(\omega_\nu) \Delta\omega = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Вместо спектральной плотности $G(\omega)$ часто рассматривают нормированную спектральную плотность $S(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{G(\omega)}{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}. \quad (2.168)$$

В этом случае нормированная корреляционная функция и спектральная плотность будут равны:

$$\left. \begin{aligned} r(\tau) &= \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ S(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r(\tau) \cos \omega \tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.169)$$

Так как

$$\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = R(0) = \sigma_x^2,$$

то нормированная спектральная плотность равна

$$S(\omega) = \frac{G(\omega)}{\sigma_x^2}. \quad (2.170)$$

Рассмотрим несколько типовых примеров корреляционных функций и спектральных плотностей случайных функций.

1) В ряде случаев нормированная корреляционная функция может быть с достаточной степенью точности аппроксимирована следующим выражением:

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

где α и ω_0 — постоянные коэффициенты.

Нормированная спектральная плотность согласно (2.169) при этом будет

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

На рис. 2.47 представлены $r(\tau)$ и $S(\omega)$ для различных отношений $\frac{\alpha}{\omega_0}$.

2) В некоторых случаях в интересующем нас диапазоне частот $(0, \omega_1)$ спектральную плотность можно считать постоянной, т. е.

$$G(\omega) = G(\omega)_{\omega=0} = G_0.$$

Случайную функцию, спектральная плотность которой постоянна во всем диапазоне частот (от 0 до ∞), называют белым шумом. Обычно этим понятием пользуются для случайной функции, имеющей постоянную спектральную плотность в ограниченном диапазоне частот (от 0 до ω_1) с указанием граничной частоты ω_1 .

3) Если случайная функция содержит явно выраженную периодическую составляющую с периодом T_1 , то корреляционная функция также будет иметь периодическую составляющую с этим же периодом, а спектральная плотность в точке $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ будет иметь резкий выброс.

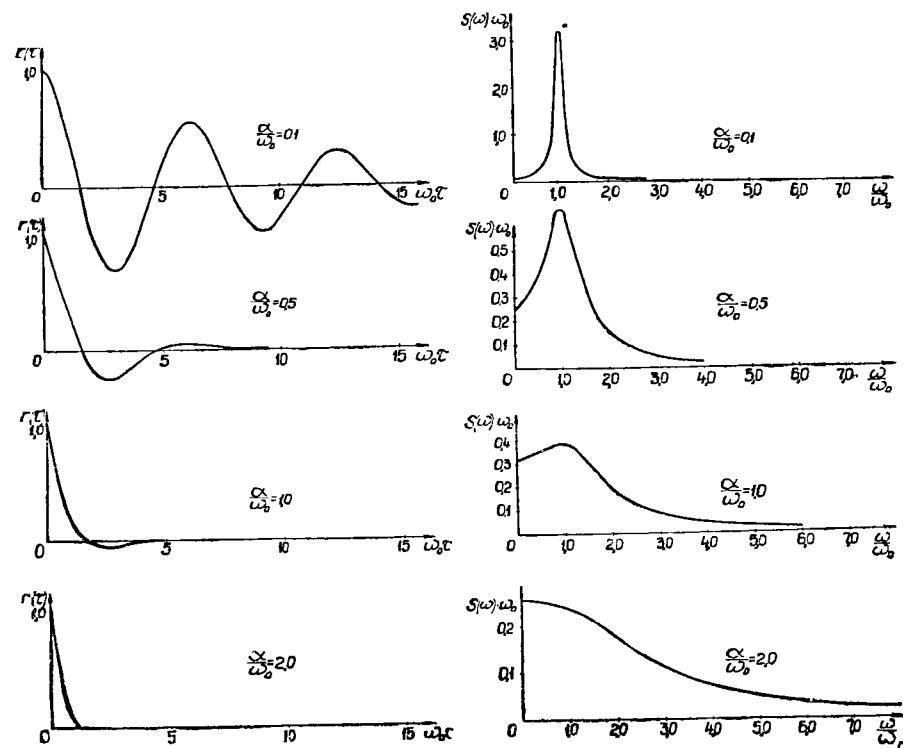


Рис. 2.47. Нормированная корреляционная функция и спектральная плотность

В ряде случаев при большой частоте $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ периодическую составляющую в случайной функции можно не учитывать. При этом можно рассматривать усредненную корреляционную функцию, т. е. корреляционную функцию без соответствующей периодической составляющей.

Характер спектральной плотности можно грубо оценить, исходя из вида корреляционной функции.

Так, если корреляционная функция имеет вид монотонно убывающей функции, то соответствующая спектральная плотность имеет максимум при $\omega=0$. При этом, чем быстрее убывает корреляционная функция, тем медленнее убывает спектральная плотность.

Если корреляционная функция имеет периодическую составляющую с периодом T_1 , то соответствующая спектральная плотность имеет выброс (максимум) на частоте этих колебаний $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. При этом, чем медленнее затухает корреляционная функция, тем больше выброс спектральной плотности на этой частоте.

4) Иногда некоторые виды нестационарных случайных функций можно при определенных условиях приближенно рассматривать как стационарные.

Примером может служить нестационарная случайная функция вида

$$Y(t) = X(t)f(t),$$

где $X(t)$ — стационарная случайная функция;

$f(t)$ — периодическая неслучайная функция с частотой Ω .

В случае когда с точки зрения воздействия процесса, описываемого функцией $Y(t)$, на какое-либо устройство несущественны составляющие ее, имеющие спектр частот, начиная с частоты Ω , и ими можно пренебречь, то функцию $Y(t)$ приближенно можно считать стационарной. В дальнейшем будем обозначать такую стационарную функцию через $Y_c(t)$. Корреляционная функция $R_{Y_c}(\tau)$ стационарной функции $Y_c(t)$ может быть получена усреднением по времени корреляционной функции $R_Y(t, \tau)$ случайной функции $Y(t)$.

Покажем это на примере нестационарной случайной функции

$$Y(t) = X(t) \cos \Omega t,$$

где $X(t)$ имеет математическое ожидание, равное нулю.

Каноническое разложение периодической случайной функции $X_T(t)$, совпадающей в интервале времени $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ со случайной функцией $X(t)$, будет

$$X_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (B_k \cos \omega_k t + C_k \sin \omega_k t),$$

где B_k и C_k — взаимно некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю.

Как было показано выше,

$$\begin{aligned} D[B_k \cos \omega_k t + C_k \sin \omega_k t] &= \\ &= M[B_k^2] = M[C_k^2] = G_{X_T}(\omega_k) \Delta \omega, \end{aligned}$$

где $D[\dots]$ — дисперсия;

$M[\dots]$ — математическое ожидание;

$G_{X_T}(\omega_k)$ — средняя спектральная плотность случайной функции $X_T(t)$;

$$\omega_k = \frac{2\pi}{2T} k;$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{2T}.$$

При $T \rightarrow \infty$ случайная функция $X_T(t) \rightarrow X(t)$.

Рассмотрим функцию

$$Y_T(t) = X_T(t) \cos \Omega t,$$

которая при $T \rightarrow \infty$ стремится к $Y(t)$.

Не нарушая общности, примем, что

$$\Omega = \frac{2\pi}{2T} N = \omega_N,$$

где N — целое число.

Таким образом,

$$\begin{aligned} Y_T(t) &= X_T(t) \cos \Omega t = X_T(t) \cos \omega_N t = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (B_k \cos \omega_k t + C_k \sin \omega_k t) \cos \omega_N t = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{ [B_k \cos (\omega_k - \omega_N) t + B_k \cos (\omega_k + \omega_N) t] + \\ &+ [C_k \sin (\omega_k - \omega_N) t + C_k \sin (\omega_k + \omega_N) t] \}. \end{aligned}$$

Так как

$$\omega_k \pm \omega_N = \frac{2\pi}{2T} (k \pm N) = \omega_{k \pm N},$$

то

$$\begin{aligned} Y_T(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{ [B_k \cos \omega_{k-N} t + B_k \cos \omega_{k+N} t] + \\ &+ [C_k \sin \omega_{k-N} t + C_k \sin \omega_{k+N} t] \}. \end{aligned}$$

После замены в суммах $k \pm N$ на n получаем

$$\begin{aligned} Y_T(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{\infty} B_{n+N} \cos \omega_n t + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} B_{n-N} \cos \omega_n t + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{\infty} C_{n+N} \sin \omega_n t + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} C_{n-N} \sin \omega_n t. \end{aligned}$$

Отбрасывая составляющую функцию $Y_T(t)$, имеющую спектр частот, больший или равный частоте $\Omega = \omega_N$, получаем

$$Y_T(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} B_{n+N} \cos \omega_n t + \frac{1}{2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} C_{n+N} \sin \omega_n t.$$

Далее, так как $\cos \omega_n t = \cos \omega_{-n} t$ и $\sin \omega_n t = -\sin \omega_{-n} t$, то

$$Y_T(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [(B_{n+N} + B_{-n+N}) \cos \omega_n t + (C_{n+N} - C_{-n+N}) \sin \omega_n t],$$

причем при $n=0$ следует $B_N + B_{-N}$ заменить на B_N .

Полученное выражение для $Y_T(t)$ ввиду отсутствия взаимной корреляции между случайными величинами

$$B_{n+N} + B_{-n+N} \text{ и } C_{n+N} - C_{-n+N}$$

($n=0, 1, \dots, N-1$) является каноническим разложением стационарной случайной функции $Y_c(t)$.

Спектральная плотность $G_{yc}(\omega)$ случайной функции $Y_c(t)$ может быть получена как предел спектральной плотности $G_{yT}(\omega)$ случайной функции $Y_T(t)$ при $T \rightarrow \infty$.

В соответствии с определением спектральной плотности $G_{yT}(\omega)$

$$G_{yT}(\omega_n) \Delta\omega = D \left[\frac{1}{2} (B_{n+N} + B_{-n+N}) \cos \omega_n t + \frac{1}{2} (C_{n+N} - C_{-n+N}) \sin \omega_n t \right].$$

Отсюда для $\omega_n < \Omega$

$$\begin{aligned} G_{yT}(\omega_n) \Delta\omega &= M \left[\frac{1}{4} (B_{n+N} + B_{-n+N})^2 \cos^2 \omega_n t \right] + \\ &+ M \left[\frac{1}{4} (C_{n+N} - C_{-n+N})^2 \sin^2 \omega_n t \right] = \\ &= \frac{1}{4} \{ M [B_{n+N}^2] + M [B_{-n+N}^2] \} \cos^2 \omega_n t + \\ &+ \frac{1}{4} \{ M [C_{n+N}^2] + M [C_{-n+N}^2] \} \sin^2 \omega_n t. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} M [B_{n+N}^2] &= M [C_{n+N}^2] = G_{xT}(\omega_{n+N}) \Delta\omega = \\ &= G_{xT}(\omega_n + \omega_N) \Delta\omega = G_{xT}(\Omega + \omega_n) \Delta\omega; \\ M [B_{-n+N}^2] &= M [C_{-n+N}^2] = G_{xT}(\omega_{-n+N}) \Delta\omega = \\ &= G_{xT}(-\omega_n - \omega_N) \Delta\omega = G_{xT}(\Omega - \omega_n) \Delta\omega, \end{aligned}$$

получаем

$$G_{yT}(\omega_n) = \frac{1}{4} [G_{xT}(\Omega + \omega_n) + G_{xT}(\Omega - \omega_n)] \text{ для } \omega_n < \Omega;$$

$$G_{yT}(\omega_n) = 0 \text{ для } \omega_n \geq \Omega.$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем

$$G_{yc}(\omega) = \frac{1}{4} [G_x(\Omega + \omega) + G_x(\Omega - \omega)] \text{ для } \omega < \Omega;$$

$$G_{yc}(\omega) = 0 \text{ для } \omega \geq \Omega.$$

Так как составляющие функции $Y(t)$, имеющие спектр частот начиная с частоты Ω , несущественны, то можно принять, что для всех значений ω

$$G_{yc}(\omega) = \frac{1}{4} [G_x(\Omega + \omega) + G_x(\Omega - \omega)].$$

Соответствующая корреляционная функция, полученная с помощью соотношений (2.165), будет

$$R_{yc}(\tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \Omega \tau,$$

где $R_x(\tau)$ — корреляционная функция случайной функции $X(t)$.

В то же время корреляционная функция случайной функции $Y(t)$ равна

$$\begin{aligned} R_y(t, \tau) &= M[X(t) \cos \Omega t X(t+\tau) \cos \Omega(t+\tau)] = \\ &= M[X(t) X(t+\tau)] \cos \Omega t \cos \Omega(t+\tau) = \\ &= R_x(\tau) \cos \Omega t \cos \Omega(t+\tau). \end{aligned}$$

Среднее значение по времени t корреляционной функции $R_y(t, \tau)$,

которое обозначим через $\tilde{R}_y(t, \tau)$, равно

$$\tilde{R}_y(t, \tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \Omega \tau.$$

Следовательно, выражения для $R_{yc}(\tau)$ и $\tilde{R}_y(t, \tau)$ совпадают.

Таким образом, нестационарную случайную функцию $Y(t) = X(t) \cos \Omega t$ при указанных выше условиях можно с достаточной степенью точности считать стационарной, и корреляционную функцию $R_{yc}(\tau)$ этой стационарной функции можно определять как среднее по времени значение корреляционной функции $R_y(t, \tau)$ случайной функции $Y(t)$.

г) Статистические методы обработки экспериментальных данных

Математические законы теории вероятностей представляют собой математическое выражение реальных закономерностей, фактически существующих в массовых случайных явлениях природы. Поэтому весьма важным является знание методов статистического анализа экспериментальных данных.

Основными задачами статистического анализа экспериментальных данных являются:

1) определение характеристик закона распределения случайной величины или системы случайных величин по экспериментальным данным;

2) определение характеристик случайных функций по экспериментальным данным;

3) оценка точности и надежности полученных статистических данных.

1) Определение характеристик закона распределения случайной величины или системы случайных величин по экспериментальным данным. Предположим, что изучается некоторая случайная величина X , закон распределения которой точно не известен, и требуется либо определить этот закон из опыта, либо проверить экспериментально гипотезу о том, что величина X подчинена тому или иному закону распределения.

С этой целью в ряде независимых экспериментов определяют значения величины X . Совокупность этих значений X и представляет собой первичный материал, подлежащий статистической обработке. Одним из способов такой обработки является построение статистического интегрального закона распределения случайной величины X .

Статистическим интегральным законом распределения $F^*(x)$ случайной величины X называется частота $P^*(X < x)$ появления события $X < x$ в данном статистическом материале:

$$F^*(x) = P^*(X < x).$$

Для того чтобы найти статистический интегральный закон распределения, достаточно подсчитать число m экспериментов, в которых случайная величина X приняла значение, меньшее чем x , и разделить его на число n произведенных экспериментов.

Статистический интегральный закон распределения любой случайной величины представляет собой ступенчатую функцию (рис. 2.48), скачки которой Δp_i^* соответствуют наблюдаемым значениям x_i случайной величины X и по величине равны частотам появления этих значений. Если каждое отдельное значение x_i случайной величины X наблюдалось только один раз, то скачки Δp_i^* будут равны $\frac{1}{n}$.

Статистический интегральный закон распределения $F^*(x)$ приближенно изображает интегральный закон распределения и приближается к нему с увеличением числа экспериментов.

Довольно часто бывает удобным иметь дело не со статистическим интегральным, а со статистическим дифференциальным законом распределения.

Для построения статистического дифференциального закона распределения весь диапазон наблюдаемых значений X разделяется на интервалы Δx_i , подсчитывается количество m_i значений X , находящихся в каждом i -м интервале, и вычисляется частота p_i^* появления X в этом интервале:

$$p^*(\Delta x_i) = \frac{m_i}{n}.$$

Сумма всех частот $p^*(\Delta x_i)$ должна быть равна единице.

Далее составляется таблица, в которой приведены интервалы Δx_i и соответствующие им частоты $p^*(\Delta x_i)$.

Практика показывает, что в большинстве случаев рационально выбирать число интервалов порядка 10—20.

Полученный материал о статистическом дифференциальном законе распределения часто оформляется графически в виде так называемой гистограммы.

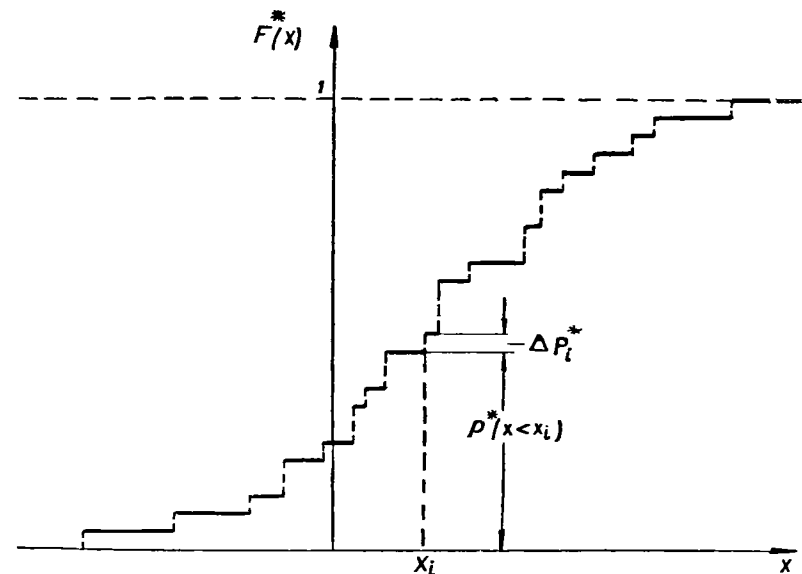


Рис. 2.48. Статистический интегральный закон распределения случайной величины

Гистограмма строится следующим образом. По оси абсцисс откладываются интервалы Δx_i . На каждом интервале, как на основании, строится прямоугольник, площадь которого равна частоте, соответствующей данному интервалу. Для построения гистограммы (рис. 2.49) нужно частоты p_i^* разделить на длины Δx_i соответствующих интервалов и полученное число

$$f^*(x) = \frac{p^*(\Delta x_i)}{\Delta x_i}$$

взять за высоту прямоугольника. Очевидно, что полная площадь гистограммы равна единице.

При увеличении числа экспериментов количество интервалов Δx_i можно увеличить; при этом гистограмма будет все более приближаться к некоторой кривой с площадью, равной единице. В пределе эта кривая представляет собой дифференциальный закон распределения величины X .

Получение интегрального и дифференциального законов распределения с помощью статистических законов распределения требует большого числа экспериментов (порядка 100—200); поэтому получение их иногда оказывается весьма затруднительным. Кроме того, в ряде случаев, когда имеется большое количество причин, вызывающих отклонения случайной величины X , знание статистического закона распределения не является необходимым, так как закон распределения случайной величины в этих случаях можно считать нормальным.

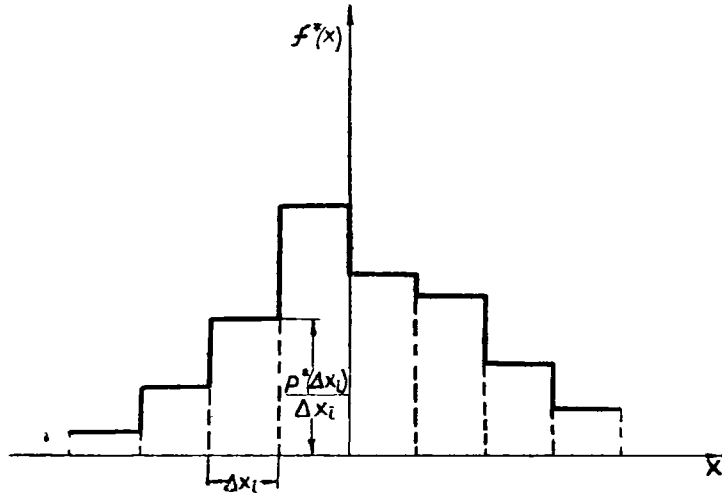


Рис. 2.49. Гистограмма — статистический дифференциальный закон распределения случайной величины

В силу этого важное значение приобретают методы получения статистических числовых характеристик. Такими числовыми характеристиками случайной величины являются статистическое математическое ожидание и статистическая дисперсия.

Статистическим математическим ожиданием \bar{x}^* (средним значением) случайной величины называется среднее значение наблюдаемых значений этой величины:

$$\bar{x}^* = M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (2.171)$$

где x_i — значение случайной величины при i -м эксперименте;
 n — общее число экспериментов.

Статистической дисперсией случайной величины называется среднее значение квадратов отклонений величины от ее статистического математического ожидания (среднего значения):

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^*)^2}{n}. \quad (2.172)$$

Для системы двух случайных величин X и Y основными статистическими числовыми характеристиками являются статистические математические ожидания \bar{x}^* и \bar{y}^* , статистические дисперсии $D^*[X]$, $D^*[Y]$ и статистический момент связи R_{xy}^* , определенные по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \bar{y}^* &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \\ D^*[X] &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^*)^2}{n} \\ D^*[Y] &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}^*)^2}{n} \\ R_{xy}^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^*)(y_i - \bar{y}^*)}{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.173)$$

Если число экспериментов n невелико, то статистические числовые характеристики как одной случайной величины, так и системы случайных величин являются также случайными величинами, а следовательно, при замене числовых характеристик их статистическими значениями можно совершить ошибку. Возникает вопрос о том, как на основании этих случайных значений числовых характеристик найти подходящие значения искомых числовых характеристик.

Под подходящими значениями числовых характеристик понимают значения их, хотя и заведомо неточные, но такие, систематическое пользование которыми приводит в среднем к меньшим ошибкам.

Можно показать, что подходящие значения числовых характеристик для одной случайной величины определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_n^* &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ D_n^*[X] &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n^*)^2}{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.174)$$

а для системы двух случайных величин как

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_n^* &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \bar{y}_n^* &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \\ D_n^*[X] &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n^*)^2}{n-1} \\ D_n^*[Y] &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n^*)^2}{n-1} \\ R_{xy}^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n^*)(y_i - \bar{y}_n^*)}{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.175)$$

Статистические числовые характеристики и подходящие значения их являются случайными величинами, которые только при большом числе экспериментов близки к истинным значениям числовых характеристик. Поэтому важно знать, насколько точно и с какой степенью надежности могут быть определены из данного количества экспериментов числовые характеристики случайных величин.

Для случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения, в ряде монографий даются формулы и таблицы доверительных вероятностей.

Доверительной вероятностью называется вероятность того, что истинное значение числовой характеристики случайной величины не будет отличаться от полученного из экспериментов подходящего значения не более чем на какую-либо заданную величину.

Из доверительных вероятностей наибольшее применение нашли вероятности

$$p_1 = P(\bar{x}_n^* - \varepsilon \sigma_n^* \leq \bar{x} \leq \bar{x}_n^* + \varepsilon \sigma_n^*)$$

и

$$p_2 = P\left(1 - \varepsilon \leq \frac{\sigma_x}{\sigma_n^*} \leq 1 + \varepsilon\right),$$

где $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$ — подходящее значение среднего квадратического отклонения. Величина p_1 показывает, с какой вероятностью истинное значение математического ожидания \bar{x} может отличаться от его подходящего значения \bar{x}_n^* , полученного из n экспериментов, на величину не более чем $\varepsilon \sigma_n^*$, где ε — некоторая величина.

Величина p_2 показывает, с какой вероятностью отношение истинного значения среднего квадратического отклонения σ_x к подходящему значению σ_n^* , полученному из n экспериментов, может отличаться от единицы на величину не более ε .

В табл. 2.3 приведены значения вероятностей p_1 , а в табл. 2.4 — вероятностей p_2 для различных n и ε . Из таблиц, например, видно, что для того чтобы получить истинные значения математического ожидания \bar{x} и среднего квадратического значения σ_x через их подходящие значения с точностью $\pm 20\%$ ($\varepsilon = 0,2$), необходимо по крайней мере 120 экспериментов (считается, что событие, вероятность которого равна 0,97, является практически достоверным).

2) Определение характеристик случайных функций по экспериментальным данным. В большинстве случаев для описания случайных процессов, протекающих в системах управления, достаточно знать математическое ожидание и корреляционную функцию этих процессов, являющихся функциями времени.

Таблица 2.3

$n \backslash \varepsilon$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	0,09	0,17	0,26	0,32	0,39	0,46	0,50	0,53	0,57	0,61
3	0,12	0,24	0,34	0,41	0,52	0,59	0,65	0,71	0,74	0,77
4	0,15	0,28	0,41	0,52	0,61	0,68	0,74	0,79	0,82	0,85
5	0,17	0,32	0,46	0,58	0,67	0,75	0,81	0,84	0,89	0,91
6	0,18	0,35	0,50	0,63	0,72	0,80	0,85	0,89	0,92	0,94
7	0,20	0,38	0,54	0,67	0,76	0,83	0,88	0,92	0,94	0,96
8	0,21	0,41	0,57	0,71	0,80	0,86	0,91	0,94	0,96	0,97
9	0,23	0,43	0,60	0,73	0,82	0,89	0,93	0,96	0,97	0,98
10	0,24	0,46	0,63	0,76	0,84	0,91	0,95	0,96	0,98	0,99
11	0,25	0,48	0,65	0,78	0,87	0,92	0,96	0,97	0,99	0,99
12	0,26	0,50	0,68	0,80	0,89	0,93	0,96	0,98	0,99	0,99
13	0,27	0,51	0,70	0,82	0,90	0,94	0,97	0,99	0,99	0,99
14	0,28	0,53	0,72	0,83	0,91	0,95	0,98	0,99	0,99	1,00
15	0,29	0,55	0,73	0,85	0,92	0,96	0,98	0,99	0,99	
16	0,30	0,57	0,75	0,86	0,93	0,97	0,99	0,99	1,00	
17	0,31	0,58	0,76	0,88	0,94	0,97	0,99	0,99		
18	0,32	0,59	0,78	0,89	0,95	0,98	0,99	1,00		
19	0,33	0,60	0,79	0,90	0,96	0,98	0,99			
20	0,34	0,62	0,80	0,92	0,96	0,98	1,00			
25	0,38	0,67	0,85	0,95	0,98	0,99				
30	0,41	0,72	0,89	0,96	0,99	1,00				
40	0,47	0,78	0,96	0,98	1,00					
60	0,56	0,87	0,98	1,00						
120	0,72	0,97	1,00							
250	0,89	1,00								

Таблица 2.4

$n \backslash \epsilon$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
2	0,10	0,19	0,29	0,38	0,46	0,52	0,56	0,58	0,60	0,62
3	0,15	0,29	0,42	0,54	0,62	0,68	0,71	0,73	0,76	0,78
4	0,18	0,36	0,52	0,64	0,71	0,76	0,79	0,82	0,84	0,86
5	0,21	0,41	0,58	0,70	0,77	0,82	0,85	0,87	0,89	0,91
6	0,24	0,46	0,64	0,75	0,82	0,86	0,88	0,91	0,93	0,94
7	0,26	0,50	0,68	0,79	0,85	0,89	0,91	0,93	0,95	0,96
8	0,29	0,54	0,72	0,82	0,87	0,91	0,93	0,95	0,96	0,97
9	0,30	0,57	0,75	0,84	0,90	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98
10	0,32	0,60	0,77	0,86	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99
11	0,34	0,62	0,80	0,88	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	0,99
12	0,36	0,64	0,82	0,89	0,94	0,96	0,97	0,99	0,99	0,99
13	0,37	0,66	0,83	0,91	0,94	0,97	0,98	0,99	0,99	1,00
14	0,38	0,68	0,85	0,92	0,95	0,97	0,99	0,99	0,99	
15	0,40	0,70	0,86	0,93	0,96	0,98	0,99	0,99	1,00	
16	0,41	0,72	0,87	0,94	0,97	0,98	0,99	1,00		
17	0,42	0,73	0,88	0,94	0,97	0,98	1,00			
18	0,44	0,75	0,89	0,95	0,98	0,99				
19	0,45	0,76	0,90	0,96	0,98	0,99				
20	0,46	0,77	0,91	0,96	0,98	0,99				
25	0,51	0,82	0,94	0,98	0,99	1,00				
30	0,55	0,86	0,96	0,99	1,00					
40	0,62	0,92	0,98	0,99						
50	0,68	0,94	0,99	0,99						
60	0,72	0,96	0,99	1,00						
70	0,76	0,97	1,00							
80	0,79	0,98								
90	0,82	0,99								
100	0,84	0,99								
150	0,91	1,00								
200	0,95									
250	0,97									
500	1,00									
1000	1,00									

По результатам записей случайных процессов (случайных функций) могут быть определены статистические значения математического ожидания и корреляционной функции случайной функции $X(t)$.

Статистическим математическим ожиданием $\bar{x}^*(t)$ случайной функции $X(t)$ называется величина

$$\bar{x}^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (2.176)$$

где $x_i(t)$ — конкретная случайная функция, полученная при i -м эксперименте;

n — число экспериментов.

Статистической корреляционной функцией $R^*(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ называется функция

$$R^*(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \bar{x}^*(t_1)] [x_i(t_2) - \bar{x}^*(t_2)]. \quad (2.177)$$

Статистическая дисперсия $D^*(t)$ случайной функции $X(t)$, равная квадрату статистического среднего квадратического значения $\sigma^*(t)$, определяется через корреляционную функцию при $t_1 = t_2 = t$:

$$D^*(t) = \sigma^{*2}(t) = R^*(t, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \bar{x}^*(t)]^2. \quad (2.178)$$

Если число экспериментов велико, то статистические характеристики $\bar{x}^*(t)$, $R^*(t_1, t_2)$ и $D^*(t)$ будут близки к истинным значениям характеристик $\bar{x}(t)$, $R(t_1, t_2)$ и $D(t)$.

Методы определения статистических характеристик случайной функции для стационарных и нестационарных функций различны.

а) Стационарные случайные функции

В соответствии с эргодическим свойством математическое ожидание \bar{x} и корреляционная функция $R(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ могут быть определены как

$$\bar{x} = M[X(t)] \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$R(\tau) = M\{[X(t) - \bar{x}][X(t + \tau) - \bar{x}]\} \approx \\ \approx \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - \bar{x}][X(t + \tau) - \bar{x}] dt.$$

Таким образом, для получения статистических математического ожидания и корреляционной функции стационарной случайной функции достаточно иметь только одну запись $x(t)$ случайной функции $X(t)$.

При этом статистическое математическое ожидание можно определить как

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i),$$

а статистическую корреляционную функцию как

$$R^*(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x(t_i) - \bar{x}^*][x(t_i + \tau) - \bar{x}^*].$$

Определение статистического математического ожидания для стационарной случайной функции наиболее просто производить следующим образом.

По виду записанной случайной функции $X(t)$ (рис. 2.50) определяется примерно наименьший период T периодической составляющей функции. Затем выбирается интервал времени Δt , не превышающий $\left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{15}\right) T$. Запись функции $X(t)$ разбивается по времени на n интервалов Δt .



Рис. 2.50. Стационарная случайная функция времени $X(t)$. К выбору интервала Δt для вычисления статистического математического ожидания и корреляционной функции

Тогда статистическое значение математического ожидания \bar{x}^* находится по формуле

$$\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.179)$$

где

$$x_i = x(t_i).$$

При вычислении число n следует брать равным 250—300, что соответствует 20—30 периодам T .

Вычисление статистической корреляционной функции удобно производить следующим образом (рис. 2.51).

На ленте бумаги столбиком на одинаковом расстоянии выписывается последовательность значений $x_1 - \bar{x}^*$, $x_2 - \bar{x}^*$, ... Изготавливаются шаблоны, в которых прорезают по две щели, отстоящие одна от другой на расстояние одной строки столбика, двух строк и т. д. Передвигая шаблон и перемножая появляющиеся в прорезах цифры, находят одну точку статистической корреляционной функции $R^*(\tau)$, соответствующей значению τ , равному произведению количества строк между щелями шаблона на величину Δt (при этом расстояние между двумя соседними строками принимается равным единице).

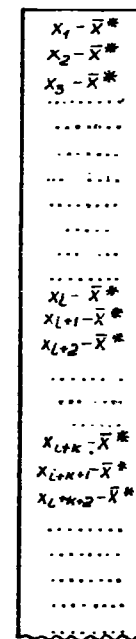
Таким образом, получим

$$R^*(k\Delta t) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x}^*)(x_{i+k} - \bar{x}^*), \quad (2.180)$$

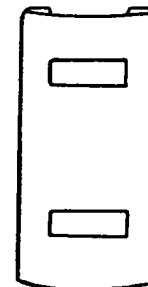
где

$$\begin{aligned} x_i &= x(t_i); \\ x_{i+k} &= x(t_{i+k}) = x(t_i + k\Delta t). \end{aligned}$$

лента бумаги с
записью значений $x - \bar{x}^*$



шаблон
 $\tau = k \cdot \Delta t$



лента бумаги с
шаблоном



Пример
 $k=5$
 $\tau = 5\Delta t$

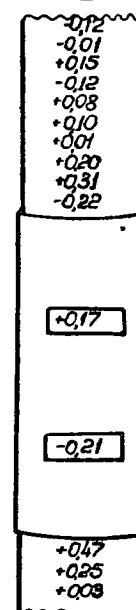


Рис. 2.51. К вычислению статистической корреляционной функции

При этом можно также получить статистическую дисперсию D^* случайной функции $X(t)$:

$$D^* = \sigma^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^*)^2.$$

Если в результате расчета получилось, что при достаточно больших значениях τ статистическая корреляционная функция стремится не к нулю, а к постоянному значению A , то это указывает на ошибку в нахождении статистического математического ожидания \bar{x}^* на величину $\pm \sqrt{A}$. В этом случае из полученной корреляционной функции следует вычесть величину A .

Если при этом ошибка $\pm \sqrt{A}$ является сравнимой со значением статистического математического ожидания \bar{x}^* , то вычисление \bar{x}^* необходимо произвести снова.

Статистическая спектральная плотность вычисляется согласно выражению

$$G^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Вычисление $G^*(\omega)$ производят обыкновенно графическим интегрированием. Для проверки результатов вычисления целесообразно вычислять интеграл

$$\int_0^{\infty} G^*(\omega) d\omega,$$

который должен быть равен статистической дисперсии D^* .

Указанный выше способ нахождения статистических характеристик случайной стационарной функции является приближенным способом.

Результат будет тем точнее, чем меньше Δt и больше число n .

Если статистические характеристики случайной функции $X(t)$ определяются для выяснения влияния случайной функции на какую-либо систему управления, то в целях упрощения вычислений следует учитывать свойства этой системы. Например, если заведомо известно, что система управления не реагирует на воздействие с частотой, большей частоты $f_1 = \frac{1}{T_1}$ (рис. 2.50), то функцию $x(t)$ можно усреднить по частотам $f > f_1$ (пунктирная кривая на рисунке) и для обработки взять интервал $\Delta t = \left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{15}\right) T_1$. И наоборот, если нужно учесть только высокие частоты $f > f_2 = \frac{1}{T_2}$, то без большой погрешности функцию $x(t)$ достаточно обработать по указанной методике относительно усредняющей кривой, выбрав $\Delta t = \left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{15}\right) T_2$.

Для упрощения вычислений статистической спектральной плотности $G^*(\omega)$ или ее нормированного значения

$$S^*(\omega) = \frac{G^*(\omega)}{\sigma^2}$$

в ряде случаев удастся аппроксимировать нормированную статистическую корреляционную функцию функцией

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

для которой

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

Для примерной, грубой оценки среднего квадратического значения стационарной случайной функции (или ее дисперсии) можно, если известно, что записанная случайная функция характеризуется нормальным законом, считать

$$\sigma^* = \frac{x_{\max}}{(2 \div 3)},$$

где x_{\max} — максимальное отклонение функции $X(t)$ от среднего значения \bar{x} на участке обработки.

б) Нестационарные случайные функции

Для определения статистических характеристик нестационарной случайной функции необходимо иметь несколько записей этих функций, а вычисление производить по формулам (2.176), (2.177) и (2.178).

Для установления того, стационарна или нестационарна данная случайная функция, следует по указанной выше методике вычисления математического ожидания \bar{x}^* и дисперсии D^* для стационарных случайных функций произвести вычисление \bar{x}^* и D^* на разных участках записи. Для стационарной случайной функции значения \bar{x}^* и D^* , полученные на различных участках, должны быть равны между собой, а для нестационарной не равны.

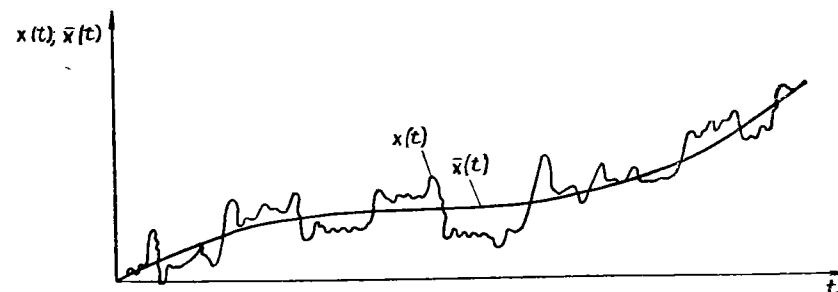


Рис. 2.52. Нестационарная случайная функция времени $X(t)$, имеющая явно выраженное математическое ожидание $\bar{x}(t)$

В системах управления часто встречаются нестационарные случайные функции вида

$$X(t) = \varphi(t) X_0(t),$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция времени;

$X_0(t)$ — стационарная случайная функция.

При этом в ряде случаев функция $\varphi(t)$ является известной функцией времени t . Тогда статистической обработке может подлежать стационарная случайная функция $X_0(t) = \frac{X(t)}{\varphi(t)}$, полученная по одной записи $x(t)$ функции $X(t)$.

В некоторых случаях нестационарная случайная функция (рис. 2.52) имеет явно выраженное математическое ожидание $\bar{x}(t)$. Тогда обработку записи случайной функции можно производить относительно этого математического ожидания.

2. Ошибки системы управления от разброса параметров ее элементов

В реальных условиях параметры системы управления могут иметь разброс относительно значений, выбранных при построении системы. Этот разброс является случайным, так как обусловлен

рядом случайных причин: неточностью изготовления в пределах допусков элементов системы, неточностью регулировки параметров, ошибками приборов, по которым производится регулировка, изменением внешних условий работы системы (температуры, давления, влажности) и т. д.

За счет разброса параметров поведение системы в реальных условиях будет отличным от поведения при выбранных параметрах, что может привести к изменению ее характеристик и к появлению дополнительных ошибок системы. Влияние изменения характеристик из-за разброса параметров элементов на устойчивость системы учитывается при ее проектировании путем выбора достаточных запасов устойчивости системы. Дополнительные ошибки системы за счет разброса параметров ее элементов необходимо учитывать при анализе точности системы.

Элементы по их роли в системе управления можно разделить на две группы:

1) элементы, определяющие характер протекания процессов в системе;

2) элементы, определяющие осуществление того или иного события в системе; к этой группе относятся элементы, выдающие в зависимости от состояния системы дискретную команду для осуществления какого-либо события, например выдачи команды на пикирование, выдачи команды на подрыв боевого заряда и т. д.

Ниже рассматриваются методы расчета ошибок от разброса параметров элементов как первой, так и второй группы.

а) Расчет ошибок от разброса параметров элементов первой группы

Для определения ошибок в рассматриваемом случае можно пользоваться двумя методами: методом вариации уравнений системы и методом непосредственного вычисления ошибок.

Рассмотрим метод вариации уравнений на примере системы, описываемой двумя дифференциальными уравнениями. Пусть уравнения системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi_1(x, y, t; C) \\ \dot{y} = \Phi_2(x, y, t; C) \end{cases} \quad (2.181)$$

где x и y — переменные величины системы;

t — время;

C — параметр;

Φ_1 и Φ_2 — некоторые функции величин x, y, t и C .

Предположим, что изменение переменных величин x и y по времени t при заданном значении параметра C , полученное в результате решения этих уравнений, известно:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (2.182)$$

Определим ошибки системы за счет разброса параметра C . Если параметр C принял значение $C + \Delta C$, то переменные величины x и y примут значения $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$. При этом Δx и Δy будут ошибками системы за счет разброса параметра C . Уравнения, описывающие поведение системы, примут вид:

$$\dot{x} + \frac{d\Delta x}{dt} = \Phi_1(x + \Delta x, y + \Delta y, t; C + \Delta C);$$

$$\dot{y} + \frac{d\Delta y}{dt} = \Phi_2(x + \Delta x, y + \Delta y, t; C + \Delta C).$$

Разлагая правые части уравнений в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами ряда, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial C} \Delta C \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi_2}{\partial C} \Delta C \end{aligned} \right\} \quad (2.183)$$

Это справедливо в том случае, если разброс параметра C приводит к небольшим ошибкам, что обыкновенно всегда имеет место.

Частные производные

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial C}; \\ &\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial C} \end{aligned}$$

после подстановки в них $x = x(t)$ и $y = y(t)$ становятся в общем случае функциями времени.

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения для определения ошибок системы Δx и Δy будут линейными уравнениями в общем случае с переменными коэффициентами.

Если ошибки системы по времени изменяются медленно, т. е. если $\frac{d\Delta x}{dt}$ и $\frac{d\Delta y}{dt}$ малы, то для приближенного определения ошибок в установившемся состоянии можно воспользоваться простыми алгебраическими линейными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial C} \Delta C &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi_2}{\partial C} \Delta C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.184)$$

Определенные из дифференциальных или алгебраических уравнений ошибки системы Δx и Δy будут пропорциональны величине ΔC :

$$\begin{cases} \Delta x = \varphi_x(t) \Delta C \\ \Delta y = \varphi_y(t) \Delta C \end{cases} \quad (2.185)$$

где $\varphi_x(t)$ и $\varphi_y(t)$ — найденные из указанных уравнений функции t .

Отклонение ΔC параметра C является случайной величиной, а полученные за счет этого ошибки системы Δx и Δy , изменяющиеся в общем случае по времени, являются простейшими случайными функциями. Законы распределения ошибок Δx и Δy будут аналогичными закону распределения случайной величины ΔC .

Числовые характеристики случайных ошибок Δx и Δy , как величин, пропорциональных ΔC , могут быть вычислены достаточно просто. Так, средние квадратические значения σ_x и σ_y ошибок Δx и Δy определяются через среднее квадратическое значение σ_c отклонения ΔC параметра C соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= |\varphi_x(t)| \sigma_c \\ \sigma_y &= |\varphi_y(t)| \sigma_c\end{aligned}\quad (2.186)$$

Обыкновенно интересуются значениями ошибок в какой-либо определенный момент времени $t=t_0$. В этом случае

$$\Delta x = \varphi_x(t_0) \Delta C$$

и

$$\Delta y = \varphi_y(t_0) \Delta C$$

будут случайными величинами.

Легко видеть, что метод вариаций может быть применен для систем какого угодно порядка, с любым количеством параметров.

Ошибки системы за счет разброса параметров ее элементов могут быть вычислены и непосредственным интегрированием уравнений системы с измененными значениями параметров.

При этом необходимо каждый раз изменять только один параметр. Вычисления можно производить для одного измененного значения параметра, учитывая, что при небольшом отклонении его ошибка будет пропорциональна этому отклонению. Законы распределения ошибок при этом будут аналогичны законам распределения отклонения ΔC параметра C .

б) Расчет ошибок от разброса параметров элементов второй группы

Разброс параметров элементов второй группы приводит к разбросу момента осуществления события (момента срабатывания элемента).

Для определения ошибок системы в этом случае можно пользоваться следующим методом.

Пусть, например, уравнение, определяющее момент осуществления какого-либо события, для данного элемента имеет вид

$$\Phi_0(x, y, t; C) = 0. \quad (2.187)$$

Например, для временного механизма это уравнение будет иметь вид

$$t - C = 0,$$

чему соответствует осуществление события с помощью временного механизма в момент $t=C$. Если переменная величина x равна даль-

ности, измеряемой каким-либо элементом, а событие должно произойти на определенной дальности C , то уравнение (2.187) будет иметь вид

$$x - C = 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что изменение переменных величин x и y по времени известно:

$$\left. \begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned} \right\} \quad (2.188)$$

Тогда уравнение, определяющее момент осуществления события, примет вид

$$\Phi_0[x(t), y(t), t, C] = 0. \quad (2.189)$$

Из этого уравнения можно определить при заданном значении параметра C время $t=t_0$, при котором будет осуществляться событие.

Пусть параметр C имеет отклонение ΔC ; тогда момент времени осуществления события также будет иметь отклонение Δt , причем уравнение для определения Δt будет

$$\Phi_0[x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t; C + \Delta C] = 0.$$

Для определения Δt можно составить уравнение в вариациях

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)_{t=t_0} \Delta t - \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial C} \right)_{t=t_0} \Delta C = 0.$$

Отклонение Δt момента осуществления события будет пропорционально отклонению ΔC параметра C :

$$\Delta t = k \Delta C, \quad (2.190)$$

где k — коэффициент пропорциональности; для рассмотренного случая

$$k = - \left(\frac{\frac{\partial \Phi_0}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}} \right)_{t=t_0}. \quad (2.191)$$

Определенный таким образом момент $t_0 + \Delta t$ осуществления события позволяет определить ошибки системы как по переменным величинам x и y (Δx и Δy), так и по другим переменным величинам.

Уравнения для определения ошибок:

$$\left. \begin{aligned}x + \Delta x &= x(t_0 + \Delta t) \\ y + \Delta y &= y(t_0 + \Delta t)\end{aligned} \right\} \quad (2.192)$$

Отсюда

$$\begin{cases} \Delta x = \dot{x}(t_0) \Delta t \\ \Delta y = \dot{y}(t_0) \Delta t \end{cases} \quad (2.193)$$

Подставляя (2.190) в (2.193), получаем

$$\begin{cases} \Delta x = \dot{x}(t_0) k \Delta C \\ \Delta y = \dot{y}(t_0) k \Delta C \end{cases} \quad (2.194)$$

При этом, так же как и в случае элементов первой группы, законы распределения ошибок Δx , Δy и т. д. будут аналогичны закону распределения отклонения параметра, а их числовые характеристики будут определяться через числовые характеристики случайной величины ΔC .

Указанный метод вычисления ошибок может быть также применен для систем, имеющих элементы второй группы, момент осуществления события в которых определяется с помощью нескольких переменных величин и параметров.

В некоторых случаях, когда осуществление события является весьма важным, например подрыв мощного боевого заряда, для повышения надежности работы системы применяют несколько аналогичных элементов, включенных параллельно. Кроме того, для уменьшения вероятности преждевременного осуществления события иногда применяют несколько (обычно два) последовательно соединенных элементов. Очевидно, что закон распределения момента осуществления события при параллельно или последовательно соединенных элементах будет отличаться от закона распределения момента осуществления события при одном элементе.

При параллельно включенных элементах срабатывание любого из них приводит к осуществлению события; при последовательно включенных элементах только срабатывание всех элементов приводит к осуществлению события.

Определим закон распределения момента осуществления события при n параллельно соединенных аналогичных элементах. Обозначим

$f(\tau)$ — дифференциальный закон распределения момента срабатывания каждого элемента;

$F(\tau)$ — интегральный закон распределения момента срабатывания каждого элемента;

$f_n(\tau)$ — дифференциальный закон распределения момента осуществления события при n параллельно соединенных элементах;

$F_n(\tau)$ — интегральный закон распределения момента осуществления события при n параллельно соединенных элементах;

τ — время, отсчитываемое относительно момента t_0 осуществления события при номинальных параметрах.

Вероятность $F_n(\tau)$ осуществления события до момента τ равна единице минус вероятность того, что событие не осуществляется до

этого момента. Последняя же равна вероятности того, что ни один из n элементов не сработает до момента τ , т. е. равна $[1 - F(\tau)]^n$.

Следовательно,

$$F_n(\tau) = 1 - [1 - F(\tau)]^n.$$

Отсюда дифференциальный закон распределения $f_n(\tau)$ момента осуществления события при n параллельно соединенных элементах будет

$$f_n(\tau) = \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} = n [1 - F(\tau)]^{n-1} \frac{dF(\tau)}{d\tau}$$

или

$$f_n(\tau) = n [1 - F(\tau)]^{n-1} f(\tau). \quad (2.195)$$

Пусть дифференциальный закон распределения момента срабатывания одного элемента является нормальным; тогда

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_1^2}}; \quad F(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\tau}{\sigma_1}\right),$$

где σ_1 — среднее квадратическое отклонение момента срабатывания каждого элемента;

Φ — интеграл вероятности.

Отсюда

$$f_n(\tau) = \frac{n}{2^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \left[1 - \Phi\left(\frac{\tau}{\sigma_1}\right)\right]^{n-1} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_1^2}}. \quad (2.196)$$

Результаты расчетов показывают, что с достаточной степенью точности можно записать функцию $f_n(\tau)$ в следующем виде:

$$f_n(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{(\tau + a_n)^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (2.197)$$

где

$$\text{при } n=2 \quad a_2 = 0,55 \sigma_1 \text{ и } \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{1,2};$$

$$\text{при } n=3 \quad a_3 = 0,8 \sigma_1 \text{ и } \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{1,35};$$

$$\text{при } n=4 \quad a_4 = 0,95 \sigma_1 \text{ и } \sigma_4 = \frac{\sigma_1}{1,45}.$$

На рис. 2.53 для сравнения приведены законы распределения, полученные как по точной формуле, так и по приближенной.

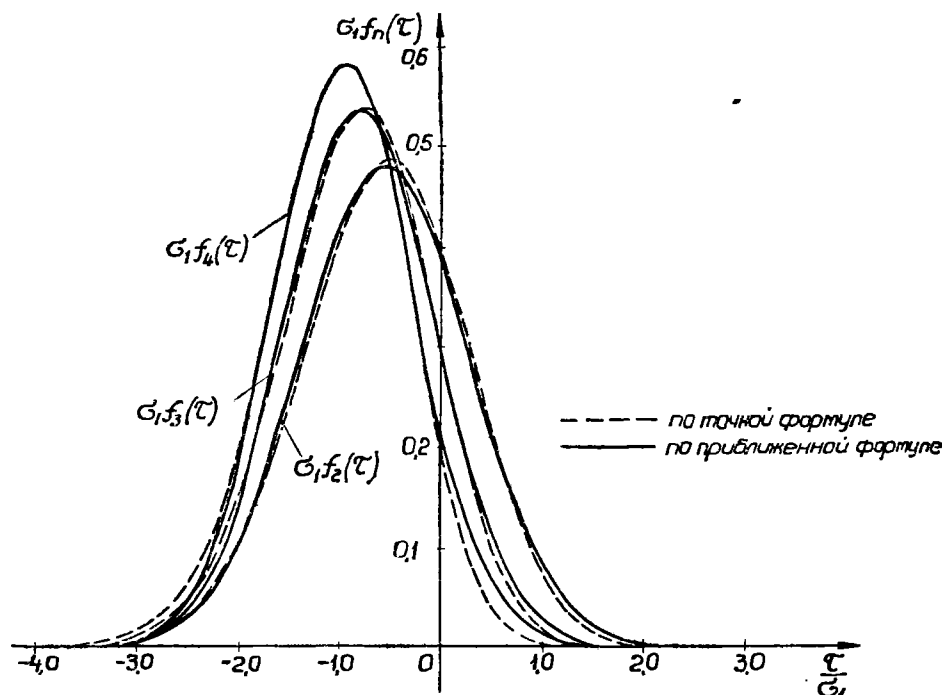


Рис. 2.53. Дифференциальные законы распределения $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ и $f_4(\tau)$, полученные по точной и приближенной формулам

Таким образом, закон распределения момента осуществления события при параллельно соединенных элементах в рассмотренном случае близок к нормальному и имеет вышеуказанные значения математического ожидания a_n и среднего квадратического отклонения σ_n .

Из формулы (2.197) видно, что математическое ожидание a_n момента осуществления события при нескольких параллельно соединенных элементах не равно нулю. Отсюда следует, что среднее время осуществления события будет равно $t_0 - a_n$ вместо t_0 при одном элементе, что приведет к появлению отличного от нуля среднего значения ошибок системы. Это может быть объяснено тем, что при нескольких элементах вероятность того, что хотя бы один элемент имеет разброс параметров, приводящий к срабатыванию его раньше заданного времени, больше, чем при одном элементе.

При установке нескольких параллельно соединенных элементов следует учитывать указанное обстоятельство. Путем выбора параметров элементов необходимо добиваться того, чтобы среднее время срабатывания каждого элемента было равно $t_0 + a_n$. Тогда среднее время момента осуществления события при n элементах будет равно $(t_0 + a_n) - a_n = t_0$. В этом случае средние значения ошибок системы будут равны нулю.

Определим закон распределения момента осуществления события при двух последовательно соединенных элементах.

Пусть

$F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$ — интегральные законы распределения момента срабатывания соответственно первого и второго элементов в отдельности;

$F(\tau)$ — интегральный закон распределения момента осуществления события при последовательном соединении элементов;

τ — время, отсчитываемое относительно момента срабатывания первого элемента t_0 при номинальных параметрах.

Вероятность $F(\tau)$ того, что событие осуществится до момента τ , равна вероятности того, что как первый, так и второй элементы сработают до момента τ . Следовательно,

$$F(\tau) = F_1(\tau) F_2(\tau). \quad (2.198)$$

Вероятность осуществления события в интервале времени $\pm \tau_0$ относительно момента t_0 будет

$$p_2 = F(\tau_0) - F(-\tau_0) = F_1(\tau_0) F_2(\tau_0) - F_1(-\tau_0) F_2(-\tau_0). \quad (2.199)$$

Как указывалось выше, один из двух последовательно соединенных элементов, например второй, обычно предохраняет систему от преждевременного случайного (вследствие какой-либо неисправности) осуществления события первым элементом. Так как в задаче второго элемента не входит осуществление события, то он может быть менее точным, чем первый элемент. В силу этого параметры второго элемента выбираются таким образом, чтобы вероятность p_2 осуществления события в заданном интервале времени двумя последовательно соединенными элементами была по крайней мере не меньше, чем вероятность p_1 осуществления события при одном первом элементе.

Вероятность осуществления события в интервале времени $\pm \tau_0$ одним первым элементом равна

$$p_1 = F_1(\tau_0) - F_1(-\tau_0). \quad (2.200)$$

Вероятность $p_2 = F_1(\tau_0) F_2(\tau_0) - F_1(-\tau_0) F_2(-\tau_0)$ будет не меньше вероятности $p_1 = F_1(\tau_0) - F_1(-\tau_0)$, если параметры второго элемента выбрать таким образом, чтобы $F_2(\tau_0) \approx 1$. Действительно, в этом случае разность

$$p_2 - p_1 = F_1(\tau_0) [F_2(\tau_0) - 1] + F_1(-\tau_0) [1 - F_2(-\tau_0)] \approx 0 + F_1(-\tau_0) [1 - F_2(-\tau_0)] > 0.$$

Предположим, что закон распределения момента срабатывания второго элемента — элемента, предохраняющего систему, является нормальным и характеризуется математическим ожиданием $-a_2$

(срабатывание второго элемента происходит в среднем раньше момента t_0) и средним квадратическим отклонением σ_2 . Тогда условие $F_2(\tau) \approx 1$ примет вид

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\tau_0 + a_2}{\sigma_2}\right) \approx 1$$

или

$$\Phi\left(\frac{\tau_0 + a_2}{\sigma_2}\right) \approx 1.$$

Отсюда получаем условие, накладываемое на математическое ожидание a_2 момента срабатывания второго элемента:

$$a_2 \geq (2,5 \div 3) \sigma_2 - \tau_0. \quad (2.201)$$

3. Ошибки от случайных воздействий

Случайные воздействия, поступающие на систему управления, обычно разделяют на два вида. К первому виду относят случайные воздействия, которые для каждого конкретного случая использования системы являются заданными функциями времени. Ко второму виду относят случайные воздействия, характер изменения которых по времени является случайным.

Ошибки системы управления от воздействий первого вида называют динамическими ошибками, а от воздействия второго вида — флюктуационными ошибками.

Ниже дается методика расчета динамических и флюктуационных ошибок систем управления.

а) Динамические ошибки

Как указывалось выше, под динамическими ошибками подразумевают ошибки системы от случайных воздействий, характер изменения которых по времени для каждого конкретного случая использования системы известен.

Примером такого рода воздействия может служить движение цели, вызывающее динамические ошибки системы слежения, наведения или самонаведения.

Из сказанного следует, что воздействия первого вида могут быть представлены как простейшие случайные функции времени или их линейные комбинации. Так как характер изменения воздействия по времени известен, то для вычисления динамических ошибок могут применяться методы построения переходных и установившихся процессов. При этом значения динамических ошибок в случаях, когда это специально не оговаривается, определяются только для установившегося режима работы системы.

Определим динамическую ошибку системы $Z(t)$ от случайного воздействия

$$X(t) = X\varphi(t), \quad (2.202)$$

где X — случайная величина;

$\varphi(t)$ — известная функция времени.

Применяя методы построения переходных и установившихся процессов, можно получить изменение ошибки по времени $z(t)$ только при полностью определенном воздействии:

$$x(t) = x\varphi(t), \quad (2.203)$$

где x — некоторая постоянная величина.

Если система управления линейна, то динамическая ошибка $Z(t)$ будет

$$Z(t) = \frac{X}{x} z(t). \quad (2.204)$$

Отсюда видно, что закон распределения динамической ошибки для линейной системы будет аналогичен закону распределения случайной величины X , определяющей воздействие. Числовые характеристики динамической ошибки также просто находятся через числовые характеристики случайной величины X . Так, среднее квадратическое значение σ_z ошибки $Z(t)$ будет

$$\sigma_z = \left| \frac{z(t)}{x} \right| \sigma_x, \quad (2.205)$$

где σ_x — среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Если система нелинейна, то, задавая различные конкретные значения величины X , можно получить зависимость динамической ошибки $Z(t)$ от X :

$$Z(t) = \varphi_1(t, X). \quad (2.206)$$

Эта зависимость позволяет найти закон распределения динамической ошибки $Z(t)$ для любого момента времени через закон распределения случайной величины X .

б) Флюктуационные ошибки

Флюктуационными ошибками называют ошибки системы от воздействий, характер изменения которых по времени является случайным.

К воздействиям, вызывающим флюктуационные ошибки системы, относятся, например, помехи и шумы в следящих системах. Фединги отраженного от цели сигнала и атмосферные возмущения.

Методы расчета флюктуационных ошибок отличаются от методов расчета динамических ошибок.

Ниже рассматриваются методы расчета флюктуационных ошибок систем управления для различных систем и различных случайных

воздействий. При этом значения флюктуационных ошибок в случаях, когда это специально не оговаривается, определяются только для установившегося режима работы системы.

1) Флюктуационные ошибки в линейных системах управления с постоянными коэффициентами при стационарном случайном воздействии. Под стационарным случайным воздействием понимается воздействие, которое может быть описано с помощью стационарной случайной функции времени.

Основными числовыми характеристиками флюктуационной ошибки являются ее математическое ожидание и среднее квадратическое значение. В рассматриваемом случае обе числовые характеристики полностью определяются математическим ожиданием воздействия, спектральной плотностью воздействия и передаточной функцией системы управления.

Рассмотрим прохождение стационарного случайного воздействия через систему.

Пусть

$X(t)$ — стационарное случайное воздействие;

$Y(t)$ — флюктуационная ошибка системы, вызванная этим воздействием;

$K_0(p)$ — передаточная функция системы.

Тогда

$$Y(p) = K_0(p) X(p),$$

где $X(p)$ и $Y(p)$ — изображения Лапласа входного воздействия и флюктуационной ошибки системы.

Возьмем совпадающую в интервале времени $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

со стационарным случайным воздействием $X(t)$ периодическую случайную функцию $X_T(t)$:

$$X_T(t) = \bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (B_{\nu} \cos \omega_{\nu} t + C_{\nu} \sin \omega_{\nu} t), \quad (2.207)$$

где \bar{x} — математическое ожидание воздействия $X(t)$;

B_{ν} и C_{ν} — взаимно некоррелированные случайные величины с равными нулю математическими ожиданиями, причем величины B_{ν} и C_{ν} с одинаковым номером имеют одну и ту же дисперсию Δ_{ν} .

При рассмотрении стационарных случайных функций было показано, что величина $\frac{2T}{\pi} \Delta_{\nu}$ при $T \rightarrow \infty$ стремится к спектральной плотности случайной функции $X(t)$, равной $G_X(\omega)$, т. е.

$$\frac{T}{\pi} \Delta_{\nu} = G_{XT}(\omega_{\nu}), \quad (2.208)$$

где $G_{XT}(\omega) \rightarrow G_X(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$.

Найдем каноническое разложение флюктуационной ошибки $Y_T(t)$ системы, обусловленной случайным воздействием $X_T(t)$. Легко видеть, что если передаточная функция системы равна $K_0(p)$, то

$$\begin{aligned} Y_T(t) &= \bar{x} K_0(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_0(\omega_{\nu}) \{B_{\nu} \cos [\omega_{\nu} t + \varphi_0(\omega_{\nu})] + \\ &\quad + C_{\nu} \sin [\omega_{\nu} t + \varphi_0(\omega_{\nu})]\} = \\ &= \bar{x} K_0(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_0(\omega_{\nu}) \{ [B_{\nu} \cos \varphi_0(\omega_{\nu}) + C_{\nu} \sin \varphi_0(\omega_{\nu})] \cos \omega_{\nu} t + \\ &\quad + [-B_{\nu} \sin \varphi_0(\omega_{\nu}) + C_{\nu} \cos \varphi_0(\omega_{\nu})] \sin \omega_{\nu} t, \end{aligned} \quad (2.209)$$

где

$$A_0(\omega) = |K_0(j\omega)|;$$

$$\varphi_0(\omega) = \arg K_0(j\omega).$$

Коэффициенты $[B_{\nu} \cos \varphi_0(\omega_{\nu}) + C_{\nu} \sin \varphi_0(\omega_{\nu})]$ и $[-B_{\nu} \sin \varphi_0(\omega_{\nu}) + C_{\nu} \cos \varphi_0(\omega_{\nu})]$ полученного разложения являются взаимно некоррелированными; дисперсия каждого из них равна

$$\Delta_{\nu} A_0^2(\omega_{\nu}).$$

Таким образом, разложение (2.209) является каноническим разложением флюктуационной ошибки системы. Следовательно, величина $\frac{2T}{\pi} \Delta_{\nu} A_0^2(\omega_{\nu})$ при $T \rightarrow \infty$ будет стремиться к спектральной плотности $G_Y(\omega_{\nu})$ флюктуационной ошибки $Y(t)$, т. е.

$$\frac{T}{\pi} \Delta_{\nu} A_0^2(\omega_{\nu}) = G_{YT}(\omega_{\nu}), \quad (2.210)$$

где $G_{YT}(\omega) \rightarrow G_Y(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$.

Сравнивая (2.208) с (2.210), получаем соотношение, связывающее спектральную плотность флюктуационной ошибки со спектральной плотностью случайного воздействия:

$$G_{YT}(\omega) = A_0^2(\omega) G_{XT}(\omega) = |K_0(j\omega)|^2 G_{XT}(\omega) \quad (2.211)$$

или, переходя к пределу,

$$G_Y(\omega) = |K_0(j\omega)|^2 G_X(\omega). \quad (2.212)$$

Как было показано выше, зная спектральную плотность случайной функции, можно определить ее среднее квадратическое отклонение. Среднее квадратическое отклонение σ_Y флюктуационной ошибки от ее математического ожидания будет определяться из соотношения

$$\sigma_Y^2 = \int_0^{\infty} G_Y(\omega) d\omega \quad (2.213)$$

или

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty |K_0(j\omega)|^2 G_x(\omega) d\omega. \quad (2.214)$$

Среднее квадратическое отклонение флюктуационной ошибки от ее математического ожидания может быть определено и непосредственным вычислением дисперсии флюктуационной ошибки, представленной в виде канонического разложения. Действительно,

$$\sigma_y^2 = D[Y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} D[Y_T(t)], \quad (2.215)$$

где

$$\begin{aligned} D[Y_T(t)] = & M \left[\left(\sum_{v=0}^{\infty} A_v(\omega_v) \{ B_v \cos[\omega_v t + \varphi_v(\omega_v)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_v \sin[\omega_v t + \varphi_v(\omega_v)] \} \right)^2 \right] = \sum_{v=0}^{\infty} \left[A_0^2(\omega_v) \{ M[B_v^2] \cos^2[\omega_v t + \varphi_v(\omega_v)] + \right. \\ & \left. + M[C_v^2] \sin^2[\omega_v t + \varphi_v(\omega_v)] \} \right] = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(\omega_v) \Delta_v. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь тем, что $\Delta_v = G_{xT}(\omega_v) \Delta\omega$, получаем

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} A_0^2(\omega_v) \Delta_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} A_0^2(\omega_v) G_{xT}(\omega_v) \Delta\omega$$

или

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty A_0^2(\omega) G_x(\omega) d\omega = \int_0^\infty |K_0(j\omega)|^2 G_x(\omega) d\omega.$$

Для вычисления σ_y^2 в тех случаях, когда известно аналитическое выражение спектральной плотности $G_x(\omega)$ и передаточная функция $K_0(p)$ имеет несложный вид, можно пользоваться таблицами интегралов, приведенными в главе 3 тома II.

Часто передаточная функция $K_0(p)$ имеет сложный вид. В этих случаях вычисление σ_y^2 производят непосредственным графическим вычислением площади (например, при помощи планиметра) под кривой

$$|K_0(j\omega)|^2 G_x(\omega) = A_0^2(\omega) G_x(\omega).$$

Амплитудную частотную характеристику наиболее удобно определять через логарифмическую амплитудную частотную характеристику.

Если в интервале частот, пропускаемых системой, случайные воздействия можно считать белым шумом, т. е. спектральная плотность воздействия сохраняет приблизительно постоянное значение, то

$$G_x(\omega) = G_0,$$

где G_0 — постоянная величина.

Отсюда

$$\sigma_y^2 = G_0 \int_0^\infty |K_0(j\omega)|^2 d\omega.$$

Интеграл

$$\int_0^\infty |K_0(j\omega)|^2 d\omega$$

называют эффективной полосой пропускания частот системы и обозначают через $\omega_{эф} = 2\pi f_{эф}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\sigma_y^2 = 2\pi G_0 f_{эф}, \quad (2.216)$$

где

$$f_{эф} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |K_0(j\omega)|^2 d\omega.$$

Математическое ожидание \bar{y} флюктуационной ошибки, как легко видеть из уравнения (2.209), равно

$$\bar{y} = K_0(0) \bar{x}.$$

2) Флюктуационные ошибки в линейных системах управления с постоянными коэффициентами при нестационарном случайном воздействии. Под нестационарным случайным воздействием понимается воздействие, описываемое с помощью нестационарной случайной функции времени.

Ниже рассматривается частный случай нестационарного случайного воздействия, а именно, когда описывающая это воздействие нестационарная случайная функция представляет собой произведение функции времени на стационарную случайную функцию.

При этом предполагается, что функция времени может быть с достаточной степенью точности аппроксимирована линейной комбинацией функций типа e^{at} .

Итак, пусть воздействие $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \varphi(t) X_0(t), \quad (2.217)$$

где $\varphi(t)$ — функция времени;

$X_0(t)$ — стационарная случайная функция.

Согласно предположению

$$\varphi(t) = \sum_k a_k e^{2kt}, \quad (2.218)$$

где a_k и α_k — постоянные величины.

Рассмотрим совпадающую в интервале времени $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ со стационарным случайным воздействием $X_0(t)$ периодическую случайную функцию $X_{0T}(t)$:

$$X_{0T}(t) = \bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (B_{\nu} \cos \omega_{\nu} t + C_{\nu} \sin \omega_{\nu} t) \quad (2.219)$$

или

$$\begin{aligned} X_{0T}(t) &= \bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (B_{\nu} - jC_{\nu}) e^{j\omega_{\nu} t} + \frac{1}{2} (B_{\nu} + jC_{\nu}) e^{-j\omega_{\nu} t} \right] = \\ &= \bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_{\nu} e^{j\omega_{\nu} t} + N_{\nu} e^{-j\omega_{\nu} t}), \end{aligned} \quad (2.220)$$

где

$$\begin{aligned} L_{\nu} &= \frac{1}{2} (B_{\nu} - jC_{\nu}); \\ N_{\nu} &= \frac{1}{2} (B_{\nu} + jC_{\nu}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_T(t) = \varphi(t) X_{0T}(t) = \sum_k a_k e^{2kt} \left[\bar{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_{\nu} e^{j\omega_{\nu} t} + N_{\nu} e^{-j\omega_{\nu} t}) \right]. \quad (2.221)$$

Пусть

$K_0(p)$ — передаточная функция системы;
 $X(p)$ и $Y(p)$ — изображения Лапласа входного воздействия и флюктуационной ошибки системы.

Тогда

$$Y(p) = K_0(p) X(p). \quad (2.222)$$

Пользуясь соотношениями (2.221) и (2.222), можно получить для каждого момента времени t выражение флюктуационной ошибки $Y_T(t)$ системы, обусловленной случайным воздействием $X_T(t)$, в следующем виде:

$$Y_T(t) = \bar{y} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (U_{\nu} e^{j\omega_{\nu} t} + V_{\nu} e^{-j\omega_{\nu} t}), \quad (2.223)$$

где

$$\bar{y} = \sum_k a_k K_0(\alpha_k) e^{\alpha_k t} \bar{x};$$

$$U_{\nu} = L_{\nu} \sum_k a_k K_0(\alpha_k + j\omega_{\nu}) e^{\alpha_k t};$$

$$V_{\nu} = N_{\nu} \sum_k a_k K_0(\alpha_k - j\omega_{\nu}) e^{\alpha_k t}.$$

Величины \bar{y} , U_{ν} и V_{ν} являются функциями времени.

Обозначим

$$\sum_k a_k K_0(\alpha_k + j\omega_{\nu}) e^{\alpha_k t} = R(\omega_{\nu}) + jS(\omega_{\nu}),$$

тогда

$$\sum_k a_k K_0(\alpha_k - j\omega_{\nu}) e^{\alpha_k t} = R(\omega_{\nu}) - jS(\omega_{\nu}).$$

Следовательно,

$$U_{\nu} = [R(\omega_{\nu}) + jS(\omega_{\nu})] \frac{1}{2} (B_{\nu} - jC_{\nu});$$

$$V_{\nu} = [R(\omega_{\nu}) - jS(\omega_{\nu})] \frac{1}{2} (B_{\nu} + jC_{\nu}).$$

Далее,

$$U_{\nu} = \frac{1}{2} [R(\omega_{\nu}) B_{\nu} + S(\omega_{\nu}) C_{\nu}] - \frac{1}{2} j [-S(\omega_{\nu}) B_{\nu} + R(\omega_{\nu}) C_{\nu}];$$

$$V_{\nu} = \frac{1}{2} [R(\omega_{\nu}) B_{\nu} + S(\omega_{\nu}) C_{\nu}] + \frac{1}{2} j [-S(\omega_{\nu}) B_{\nu} + R(\omega_{\nu}) C_{\nu}]$$

или

$$\left. \begin{aligned} U_{\nu} &= \frac{1}{2} (D_{\nu} - jE_{\nu}) \\ V_{\nu} &= \frac{1}{2} (D_{\nu} + jE_{\nu}) \end{aligned} \right\} \quad (2.224)$$

где

$$D_{\nu} = R(\omega_{\nu}) B_{\nu} + S(\omega_{\nu}) C_{\nu};$$

$$E_{\nu} = -S(\omega_{\nu}) B_{\nu} + R(\omega_{\nu}) C_{\nu}.$$

Пользуясь выражением (2.224), формулу (2.223), определяющую $Y_T(t)$, можно представить в следующем виде:

$$Y_T(t) = \bar{y} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (D_{\nu} \cos \omega_{\nu} t + E_{\nu} \sin \omega_{\nu} t). \quad (2.225)$$

Коэффициенты D_v и E_v являются случайными взаимно некоррелированными величинами, причем

$$D[D_v] = D[E_v] = M[E_v^2] = R^2(\omega_v) M[B_v^2] + S^2(\omega_v) M[C_v^2] = \\ = [R^2(\omega_v) + S^2(\omega_v)] \Delta_v = |\sum_k a_k K_0(z_k + j\omega_v) e^{z_k t}|^2 \Delta_v.$$

Дисперсия флюктуационной ошибки

$$D[Y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} D[Y_T(t)] = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\sum_{v=0}^{\infty} (D_v \cos \omega_v t + E_v \sin \omega_v t) \right] = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \{ M[D_v^2] \cos^2 \omega_v t + M[E_v^2] \sin^2 \omega_v t \} = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_k a_k K_0(z_k + j\omega_v) e^{z_k t} \right|^2 \Delta_v. \quad (2.226)$$

Так как Δ_v при $T \rightarrow \infty$ стремится к $G_{x0}(\omega_v) d\omega$, где $G_{x0}(\omega)$ — спектральная плотность стационарной случайной функции $X_0(t)$, то

$$D[Y(t)] = \sigma_y^2 = \int_0^{\infty} \left| \sum_k a_k K_0(z_k + j\omega) e^{z_k t} \right|^2 G_{x0}(\omega) d\omega$$

или

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} G_y(\omega, t) d\omega, \quad (2.227)$$

где

$$G_y(\omega, t) = \left| \sum_k a_k K_0(z_k + j\omega) e^{z_k t} \right|^2 G_{x0}(\omega). \quad (2.228)$$

Функцию $G_y(\omega, t)$ при вычислении ошибки системы можно для каждого фиксированного значения t рассматривать как спектральную плотность флюктуационной ошибки системы.

Величины $K_0(\alpha + j\omega)$ могут быть получены из передаточной функции $K_0(p)$ заменой p на $\alpha + j\omega$. Вычисление $K_0(\alpha + j\omega)$ удобно производить построением логарифмических частотных характеристик, соответствующих измененным передаточным функциям $K_{0\alpha}(p)$, удовлетворяющим условию $K_{0\alpha}(j\omega) = K_0(\alpha + j\omega)$. В табл. 2.5 приведены передаточные функции $K_0(p)$ типовых звеньев и соответствующие им измененные передаточные функции $K_{0\alpha}(p)$.

Таблица 2.5

$K_0(p)$	$K_{0\alpha}(p)$
k	k
$\frac{k}{p}$	$\frac{k_1}{1 + T_1 p}$, где $k_1 = \frac{k}{\alpha}$; $T_1 = \frac{1}{\alpha}$
$\frac{k}{p^2}$	$\frac{k_1}{(1 + T_1 p)^2}$, где $k_1 = \frac{k}{\alpha^2}$; $T_1 = \frac{1}{\alpha}$
$\frac{1}{1 + Tp}$ или $1 + Tp$	$\frac{k_1}{1 + T_1 p}$ или $\frac{1 + T_1 p}{k_1}$, где $k_1 = \frac{1}{1 + \alpha T}$; $T_1 = \frac{T}{1 + \alpha T}$
$\frac{1}{1 + 2\xi Tp + T^2 p^2}$ или $1 + 2\xi Tp + T^2 p^2$	$\frac{k_1}{1 + 2\xi_1 T_1 p + T_1^2 p^2}$ или $\frac{1 + 2\xi_1 T_1 p + T_1^2 p^2}{k_1}$, где $\xi_1 = \frac{\xi + \alpha T}{1 + 2\xi \alpha T + \alpha^2 T^2}$; $T_1 = \frac{T}{1 + 2\xi \alpha T + \alpha^2 T^2}$; $k_1 = \frac{1}{2\xi \alpha + T^2 \alpha^2}$

Если функция $\varphi(t)$ может быть аппроксимирована одним членом ae^{zt} , то

$$G_y(\omega, t) = (ae^{zt})^2 |K_0(\alpha + j\omega)|^2 G_{x0}(\omega) = |K_0(\alpha + j\omega)|^2 G_x(\omega, t),$$

где $G_x(\omega, t) = (ae^{zt})^2 G_{x0}(\omega)$ можно рассматривать как спектральную плотность воздействия $X(t)$, соответствующую моменту времени t .

Математическое ожидание \bar{y} флюктуационной ошибки равно

$$\bar{y} = ae^{zt} K_0(\alpha) \bar{x}_0$$

или

$$\bar{y} = K_0(\alpha) \bar{x},$$

где $\bar{x} = ae^{\alpha t} \bar{x}_0$ — математическое ожидание случайной функции $X(t)$

Аналогичным образом могут быть найдены значения σ_y и \bar{y} для случая, когда функция $\varphi(t)$ аппроксимируется полиномом $A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$, где A_0, A_1, \dots, A_n — постоянные коэффициенты.

3) Флюктуационные ошибки в линейных системах управления с переменными коэффициентами. Если коэффициенты дифференциального уравнения, связывающего флюктуационную ошибку системы $Y(t)$ с входным воздействием $X(t)$, могут быть с достаточной степенью точности аппроксимированы линейной комбинацией функций типа $e^{a_i t}$, то ранее описанным методом последовательных приближений можно получить изображение $Y(p)$ флюктуационной ошибки системы через изображение $X(p)$ входного воздействия. При этом изображение $Y(p)$ будет иметь вид

$$Y(p) = \sum_i K_i(p) X(p - a_i),$$

где $K_i(p)$ — некоторые целые функции p ;

a_i — постоянные коэффициенты.

Изображение $X(p - a_i)$ равно изображению $X_i(p)$ функции

$$X_i(t) = e^{a_i t} X(t).$$

Таким образом, можно записать, что

$$Y(p) = \sum_i K_i(p) X_i(p).$$

Если при этом воздействие $X(t)$ является нестационарным и может быть представлено в виде (2.218)

$$X(t) = \varphi(t) X_0(t) = \sum_k a_k e^{z_k t} X_0(t),$$

где $X_0(t)$ — стационарная случайная функция, то

$$X_i(t) = \sum_k a_k e^{(z_k + a_i)t} X_0(t).$$

Поступая таким же образом, как и в предыдущем случае, получаем спектральную плотность флюктуационной ошибки для какого-либо момента времени

$$G_y(\omega, t) = \left| \sum_k \sum_i a_k K_i(z_k + a_i + j\omega) e^{(z_k + a_i)t} \right|^2 G_{x0}(\omega).$$

Среднее квадратическое отклонение σ_y флюктуационной ошибки от ее математического ожидания находится из соотношения

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty G_y(\omega, t) d\omega.$$

Математическое ожидание флюктуационной ошибки

$$\bar{y} = \sum_k \sum_i a_k K_i(z_k + a_i) e^{(z_k + a_i)t}.$$

4) Флюктуационные ошибки в импульсных системах управления при стационарном случайном воздействии.

Пусть

$X(t)$ — стационарное случайное воздействие, приведенное к входу импульсного элемента;

$Y(t)$ — флюктуационная ошибка системы, вызванная этим воздействием.

Вместо непрерывных функций $X(t)$ и $Y(t)$ при исследовании систем импульсного управления рассматривают ступенчатые функции $X[nT_0]$ и $Y[nT_0, \varepsilon]$, где $t = (n + \varepsilon)T_0$.

Изображения $X^*(q)$ и $Y^*(q, \varepsilon)$ ступенчатых функций $X[nT_0]$ и $Y[nT_0, \varepsilon]$ связаны соотношением

$$Y^*(q, \varepsilon) = K_{oi}^*(q, \varepsilon) X^*(q), \quad (2.229)$$

где $K_{oi}^*(q, \varepsilon)$ — дискретная передаточная функция импульсной системы.

Определим математическое ожидание флюктуационной ошибки $\bar{y}(\varepsilon)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_y(\varepsilon)$ флюктуационной ошибки от ее математического ожидания.

Рассмотрим для этого периодическую случайную функцию

$$X_T(t) = \bar{x} + \sum_{v=0}^{\infty} (B_v \cos \omega_v t + C_v \sin \omega_v t), \quad (2.230)$$

совпадающую в интервале времени $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ со стационарным случайным воздействием $X(t)$.

Зная выражение для $X_T(t)$, можно написать

$$Y_T[nT_0, \varepsilon] = \bar{x} K_{oi}^*(0, \varepsilon) + \sum_{v=0}^{\infty} A_{oi}^*(\omega_v, T_0, \varepsilon) \{ B_v \cos [\omega_v nT_0 + \varphi_{oi}^*(\omega_v, T_0, \varepsilon)] + C_v \sin [\omega_v nT_0 + \varphi_{oi}^*(\omega_v, T_0, \varepsilon)] \}, \quad (2.231)$$

где

$$A_{oi}^*(\omega_v, T_0, \varepsilon) = |K_{oi}^*(j\omega_v, T_0, \varepsilon)|;$$

$$\varphi_{oi}^*(\omega_v, T_0, \varepsilon) = \arg K_{oi}^*(j\omega_v, T_0, \varepsilon).$$

Отсюда математическое ожидание флюктуационной ошибки

$$\bar{y}(\varepsilon) = K_{oi}^*(0, \varepsilon) \bar{x}.$$

Среднее квадратическое отклонение флюктуационной ошибки от ее математического ожидания определится как корень квадратный из дисперсии случайной величины $Y[nT_0, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned}\sigma_y^2(\varepsilon) &= D[Y[nT_0, \varepsilon]] = \lim_{T \rightarrow \infty} D[Y_T[nT_0, \varepsilon]] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon) \{B_\nu \cos[\omega, nT_0 + \varphi_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon)] + \right. \\ &\quad \left. + C_\nu \sin[\omega, nT_0 + \varphi_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon)]\} \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon) \{M[B_\nu^2] \cos^2[\omega, nT_0 + \varphi_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon)] + \\ &\quad + M[C_\nu^2] \sin^2[\omega, nT_0 + \varphi_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon)]\}\end{aligned}$$

или

$$\sigma_y^2(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{0i}^*(\omega, T_0, \varepsilon) \Delta_\nu. \quad (2.232)$$

Выше было показано, что дисперсия Δ_ν ν -й гармоники случайной функции $X(t)$ при $T \rightarrow \infty$ стремится к

$$G_x(\omega) d\omega,$$

где $G_x(\omega)$ — спектральная плотность случайного воздействия $X(t)$. Отсюда

$$\sigma_y^2(\varepsilon) = \int_0^\infty A_{0i}^*(\omega T_0, \varepsilon) G_x(\omega) d\omega \quad (2.233)$$

или

$$\sigma_y(\varepsilon) = \sqrt{\int_0^\infty |K_{0i}^*(j\omega T_0, \varepsilon)|^2 G_x(\omega) d\omega}. \quad (2.234)$$

Формулой (2.234) для $\sigma_y(\varepsilon)$ удобно пользоваться в тех случаях, когда $G_x(\omega)$ с ростом ω быстро убывает, например, когда можно считать, что $G_x(\omega) \approx 0$ при $\omega > (3-4) \frac{\pi}{T_0}$.

Если $G_x(\omega)$ с ростом ω уменьшается медленно, то для вычисления $\sigma_y(\varepsilon)$ удобнее пользоваться другой формулой. Выведем эту формулу.

Как уже указывалось ранее, $K_{0i}(j\omega T_0, \varepsilon)$ является периодической функцией с периодом по ωT_0 , равным 2π . Следовательно, $|K_{0i}^*(j\omega T_0, \varepsilon)|^2$ может быть разложен в ряд Фурье по косинусам:

$$|K_{0i}^*(j\omega T_0, \varepsilon)|^2 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega T_0,$$

где

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega}; \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega}; \\ \bar{\omega} &= \omega T_0.\end{aligned}$$

Пользуясь выражением для коэффициентов a_0, a_k , можно написать

$$\begin{aligned}|K_{0i}^*(j\omega T_0, \varepsilon)|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega T_0 \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega}.\end{aligned}$$

После подстановки $|K_{0i}^*(j\omega, \varepsilon)|^2$ в формулу (2.234) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_y^2(\varepsilon) &= \int_0^\infty |K_{0i}^*(j\omega T_0, \varepsilon)|^2 G_x(\omega) d\omega = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega T_0 \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega} \right] G_x(\omega) d\omega = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} \right] G_x(\omega) d\omega + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega} \right] \cos k\omega T_0 G_x(\omega) d\omega = \\ &= \int_0^\infty G_x(\omega) d\omega \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty G_x(\omega) \cos k\omega T_0 d\omega \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega}.\end{aligned}$$

Согласно выражениям (2.165) и (2.167)

$$\int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega = R_x(0)$$

и

$$\int_0^{\infty} G_x(\omega) \cos k\omega T_0 d\omega = R_x(kT_0),$$

где $R_x(0)$ и $R_x(kT_0)$ — значения корреляционной функции $R_x(\tau)$ при $\tau=0$ и kT_0 ; поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\varepsilon) &= R_x(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} R_x(kT_0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 \cos k\bar{\omega} d\bar{\omega} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \left[R_x(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_x(kT_0) \cos k\bar{\omega} \right] |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega} \end{aligned}$$

или

$$\sigma_y^2(\varepsilon) = \int_0^{\pi} G^*(\bar{\omega}) |K_{0i}^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega},$$

где

$$G^*(\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi} \left[R_x(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_x(kT_0) \cos k\bar{\omega} \right].$$

Полученное выражение удобно для вычисления $\sigma_y^2(\varepsilon)$ в тех случаях, когда спектральная плотность $G_x(\omega)$ с ростом ω уменьшается медленно. В этом случае корреляционная функция $R_x(\tau)$ с ростом τ быстро уменьшается и, следовательно, для вычисления $G^*(\bar{\omega})$ можно ограничиться одним или несколькими первыми членами ряда.

Функцию $G_x^*(\bar{\omega})$ обычно называют дискретной спектральной плотностью случайной функции $X(t)$.

Значения $\bar{y}(\varepsilon)$ и $\sigma_y(\varepsilon)$ зависят от параметра ε , который определяет относительное время между моментами возникновения импульсов и моментами, в которые рассматривается значение флюктуационной ошибки системы.

Обыкновенно эта зависимость является незначительной и $\bar{y}(\varepsilon)$ и $\sigma_y(\varepsilon)$ определяют для какого-либо одного значения ε , например $\varepsilon=0$.

Математическое ожидание \bar{y} и дисперсию σ_y^2 флюктуационной ошибки $Y(t)$ можно получить также как средние значения величин $\bar{y}(\varepsilon)$ и $\sigma_y^2(\varepsilon)$ из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \int_0^1 \bar{y}(\varepsilon) d\varepsilon \\ \sigma_y^2 &= \int_0^1 \sigma_y^2(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.235)$$

Вычисление величин \bar{y} и σ_y обычно производят построением подынтегральных функций и последующим численным интегрированием.

В случаях когда значения воздействия в моменты возникновения импульсов можно считать некоррелированными, т. е. когда корреляционная функция $R(\tau)$ воздействия $X(t)$ при $\tau \geq T_0$ практически равна нулю, математическое ожидание и среднее квадратическое значение флюктуационной ошибки могут быть получены следующим образом.

Согласно равенству (2.104) значение флюктуационной ошибки

$$Y[nT_0, \varepsilon] = \sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i X[(n-k-l+m)T_0]. \quad (2.236)$$

Отсюда математическое ожидание флюктуационной ошибки

$$\bar{y}[nT_0, \varepsilon] = \bar{x} \sum_{k=0}^{n-l+m} \Gamma_k^i. \quad (2.237)$$

Среднее квадратическое отклонение флюктуационной ошибки от ее математического ожидания определится через дисперсию

$$\sigma_y^2[nT_0, \varepsilon] = D[Y[nT_0, \varepsilon]].$$

В силу того, что значения воздействия $X(t)$ в моменты возникновения импульсов некоррелированы,

$$\sigma_y^2[nT_0, \varepsilon] = D[Y[nT_0, \varepsilon]] = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{n-l+m} (\Gamma_k^i)^2. \quad (2.238)$$

В отличие от всех предыдущих формул выражения (2.237) и (2.238) применимы для вычисления флюктуационных ошибок системы не только в установившемся режиме работы системы, но и для промежутка времени непосредственно после приложения случайного воздействия.

5) Флюктуационные ошибки в нелинейных системах. Метод статистической линеаризации.

Рассмотрим прохождение случайного воздействия через нелинейный элемент, характеристика которого имеет вид

$$y = \Psi(x). \quad (2.239)$$

При воздействии на вход нелинейного элемента случайной функции времени $x = X(t)$ выходная величина нелинейного элемента будет представлять также случайную функцию времени $y = Y(t)$.

Случайная функция $Y(t)$ на выходе нелинейного элемента может быть полностью охарактеризована n -мерными законами распределения, однако, как указывалось выше, в прикладной теории ограничиваются рассмотрением моментных характеристик случайной функции $Y(t)$.

В качестве одного из методов оценки характеристик случайной функции $Y(t) = \Psi[X(t)]$ может быть использован метод статистической линеаризации. Этот метод исходит из предположения, что знание некоторых характеристик случайной функции $Y(t)$ является достаточным для вычисления флюктуационных ошибок системы. Метод статистической линеаризации имеет свои разновидности в зависимости от того, какие характеристики и приближенные способы вычисления их приняты за основу.

Ниже излагается наиболее простая разновидность метода статистической линеаризации, когда в качестве основных характеристик, достаточных для оценки флюктуационных ошибок системы, принимаются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной функции, а в качестве метода приближенного вычисления их — метод последовательных приближений.

Пусть

\bar{x} и \bar{y} — математические ожидания случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;
 σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$f(x)$ — дифференциальный закон распределения случайной функции $X(t)$ (для нестационарной случайной функции закон распределения зависит и от времени t).

Тогда можно записать

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) f(x) dx \\ \sigma_y &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x) dx - \bar{y}^2} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(x) f(x) dx - \bar{y}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.240)$$

В рассматриваемом методе, как указывалось выше, предполагается, что для вычисления флюктуационных ошибок системы достаточно знать математическое ожидание и среднее квадратическое

отклонение случайной функции. Этому соответствует предположение, что воздействие на входе нелинейного элемента подчинено нормальному закону распределения, т. е. $f(x)$ является нормальным законом.

В этом случае \bar{y} и σ_y будут зависеть только от \bar{x} и σ_x :

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \varphi_1(\bar{x}, \sigma_x) \\ \sigma_y &= \varphi_2(\bar{x}, \sigma_x) \end{aligned} \right\} \quad (2.241)$$

Эту зависимость иногда представляют в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= k_1(\bar{x}, \sigma_x) \bar{x} \\ \sigma_y &= k_2(\bar{x}, \sigma_x) \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (2.242)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1(\bar{x}, \sigma_x) &= \frac{\varphi_1(\bar{x}, \sigma_x)}{\bar{x}} \\ k_2(\bar{x}, \sigma_x) &= \frac{\varphi_2(\bar{x}, \sigma_x)}{\sigma_x} \end{aligned} \right\} \quad (2.243)$$

Коэффициенты $k_1(\bar{x}, \sigma_x)$ и $k_2(\bar{x}, \sigma_x)$ называют передаточными коэффициентами первого и второго порядка. Эти коэффициенты можно рассматривать как коэффициенты усиления нелинейного элемента по математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению случайной функции $X(t)$.

Связь между величинами \bar{y} , σ_y и величинами \bar{x} , σ_x для различных нелинейных элементов с релейной характеристикой может быть получена из рис. 2.54 и 2.55.

Так, для нелинейного элемента, изображенного на рис. 2.54:

$$y = \Psi(x) = \begin{cases} -B & \text{при } x < 0; \\ +B & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

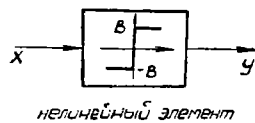
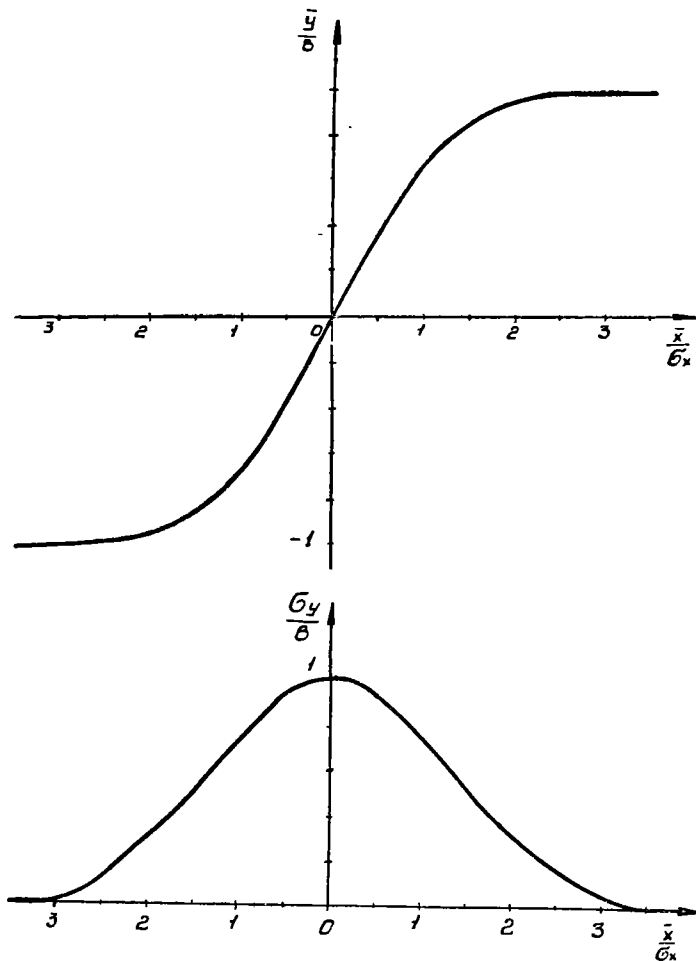
Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) f(x) dx = -B \int_{-\infty}^0 f(x) dx + B \int_0^{+\infty} f(x) dx = \\ &= -B \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right) \right] + B \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right) \right] = B \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right), \end{aligned}$$

где $\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)$ — интеграл вероятности.

Коэффициент $k_1(\bar{x}, \sigma_x)$ определяется как отношение $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$:

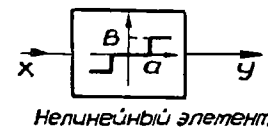
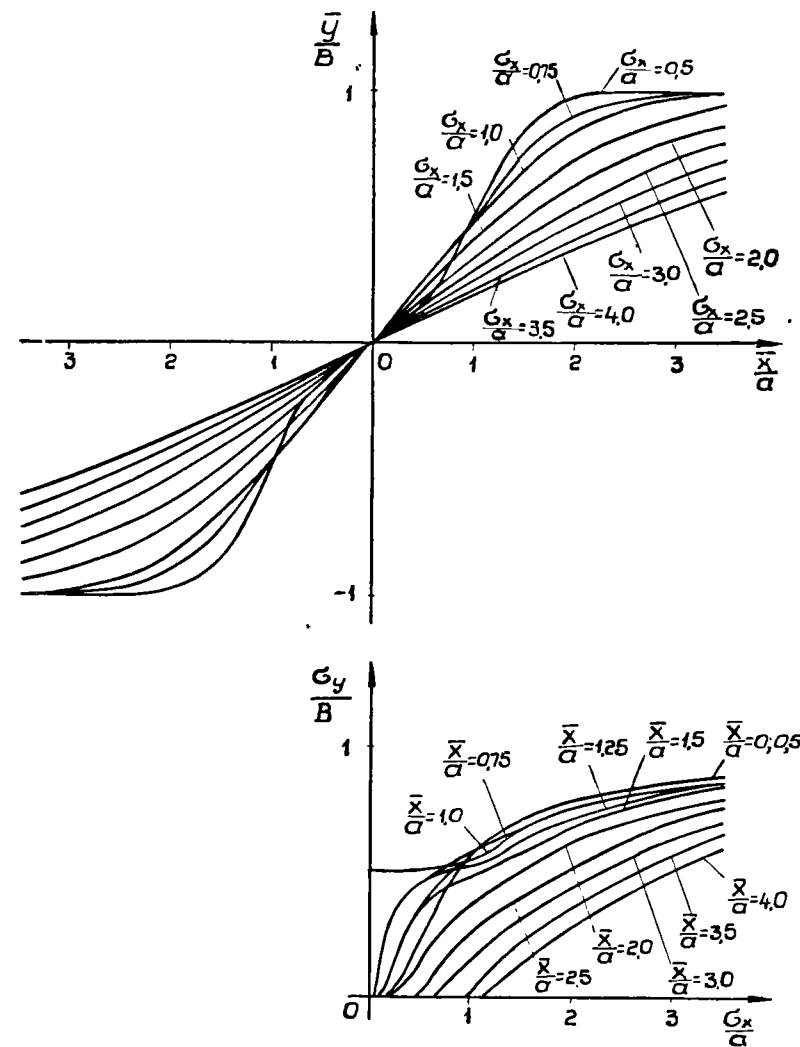
$$k_1(\bar{x}, \sigma_x) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = B \frac{\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)}{\bar{x}}.$$



$$\bar{y} = B \varphi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)$$

$$\sigma_y = B \sqrt{1 - \varphi^2\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)}$$

Рис. 2.54. Величины $\frac{\bar{y}}{B}$ и $\frac{\sigma_y}{B}$ для нелинейного элемента релейного типа без зоны нечувствительности



$$\bar{y} = B \frac{1}{2} \left\{ \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 + \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] - \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] \right\}$$

$$\sigma_y = B \sqrt{1 - \frac{1}{2} \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 + \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] - \frac{1}{2} \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] - \frac{1}{4} \left\{ \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 + \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] - \Phi\left[\frac{a}{\sigma_x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)\right] \right\}^2}$$

Рис. 2.55. Величины $\frac{\bar{y}}{B}$ и $\frac{\sigma_y}{B}$ для нелинейного элемента релейного типа с зоной нечувствительности

Далее,

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(x) f(x) dx - \bar{y}^2} = \\ &= \sqrt{B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - B^2 \Phi^2\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)} = \\ &= B \sqrt{1 - \Phi^2\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)}.\end{aligned}$$

Коэффициент $k_2(\bar{x}, \sigma_x)$ определяется как отношение $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$:

$$k_2(\bar{x}, \sigma_x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = B \frac{\sqrt{1 - \Phi^2\left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)}}{\sigma_x}.$$

Для приближенного расчета флюктуационной ошибки системы нелинейный элемент заменяют линейным элементом, причем коэффициент усиления его для вычисления математического ожидания флюктуационной ошибки принимают равным $k_1 = k_1(\bar{x}, \sigma_x)$, а для вычисления среднего квадратического отклонения от математического ожидания — равным $k_2 = k_2(\bar{x}, \sigma_x)$.

Процесс вычисления флюктуационной ошибки системы сводится к следующему:

а) задаются какими-либо более или менее реальными значениями коэффициентов k_1 и k_2 ;

б) для заданных значений коэффициентов k_1 и k_2 определяются математическое ожидание \bar{x} и среднее квадратическое отклонение σ_x случайной функции на входе нелинейного элемента;

в) по значениям \bar{x} и σ_x определяются коэффициенты $k_1 = k_1(\bar{x}, \sigma_x)$ и $k_2 = k_2(\bar{x}, \sigma_x)$;

г) для полученных коэффициентов k_1 и k_2 снова определяются математическое ожидание \bar{x} и среднее квадратическое отклонение σ_x случайной функции на входе нелинейного элемента и т. д.

Определение приближенных значений k_1 и k_2 заканчивается тогда, когда их значения при последующем приближении практически не меняются.

Метод статистической линеаризации является методом, дающим приближенное представление о влиянии нелинейности элементов на флюктуационные ошибки системы.

Этот метод вследствие замены нелинейного элемента линейным не учитывает происходящие в нелинейном элементе изменения характера закона распределения случайного воздействия и спектральной плотности его.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ

Одной из основных характеристик, определяющих систему управления в целом, является вероятность поражения цели.

В системах, обеспечивающих поражение цели путем подрыва боевого заряда в некоторой области вблизи цели, размеры этой области задаются, исходя из того, чтобы при попадании снаряда в нее происходило достоверное поражение цели. В этом случае для определения вероятности поражения цели достаточно найти вероятность попадания самолета-снаряда в заданную плоскую область (площадь), охватывающую цель, или заданную объемную область над целью. Следует отметить, что под попаданием в заданную объемную область здесь понимается не только попадание снаряда в нее, но и подрыв боевого заряда в этой области.

В системах, обеспечивающих поражение или повреждение цели путем подрыва боевого заряда при непосредственном попадании снаряда в цель, для определения вероятности поражения цели необходимо знать условный закон поражения ее, т. е. вероятность поражения цели при условии, что самолет-снаряд попал в данную часть цели.

В настоящей работе даются методы расчета вероятности попадания снаряда в заданную плоскую область или в заданную объемную область над целью при стрельбе одним снарядом или серией снарядов.

1. Вероятность попадания при стрельбе одним снарядом

Если заданная плоская область представляет собой прямоугольник (рис. 2.56), а ошибки попадания снаряда в направлении его сторон независимы, то вероятность попадания в прямоугольник будет равна

$$p = P\left(\begin{matrix} a < X < b \\ c < Y < d \end{matrix}\right) = P(a < X < b) P(c < Y < d), \quad (2.244)$$

где X и Y — ошибки попадания снаряда в направлении сторон прямоугольника;

a, b, c, d — величины, характеризующие прямоугольник и его положение относительно начала отсчета X и Y .

Ошибки X и Y вызываются обыкновенно достаточно большим числом независимых случайных причин, поэтому законы распределения этих ошибок обычно считают нормальными. Характеристиками, полностью определяющими нормальный закон распределения, являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание ошибок попадания X и Y находится как сумма математических ожиданий различных составляющих ошибок, а среднее квадратическое отклонение — как корень квадратный из суммы квадратов средних квадратических отклонений независимых составляющих ошибок от их математических ожиданий.

Пусть найденные таким образом математические ожидания относительно начала отсчета и средние квадратические отклонения

ошибок попадания X и Y равны соответственно a_x, a_y и σ_x, σ_y . Тогда согласно (2.125)

$$P(a < X < b) = \frac{1}{2} \left[-\Phi \left(\frac{a - a_x}{\sigma_x} \right) + \Phi \left(\frac{b - a_x}{\sigma_x} \right) \right];$$

$$P(c < Y < d) = \frac{1}{2} \left[-\Phi \left(\frac{c - a_y}{\sigma_y} \right) + \Phi \left(\frac{d - a_y}{\sigma_y} \right) \right],$$

где функция Φ — интеграл вероятности.

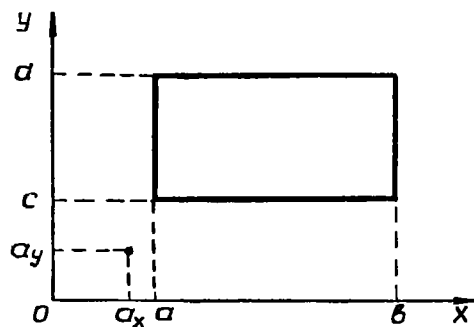


Рис. 2.56

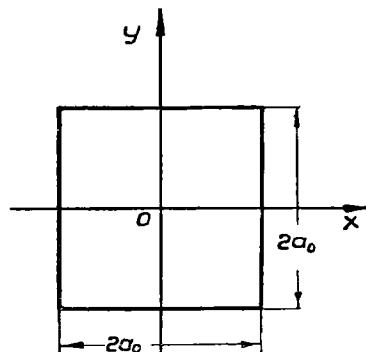


Рис. 2.57

Отсюда

$$p = \frac{1}{4} \left[-\Phi \left(\frac{a - a_x}{\sigma_x} \right) + \Phi \left(\frac{b - a_x}{\sigma_x} \right) \right] \times \\ \times \left[-\Phi \left(\frac{c - a_y}{\sigma_y} \right) + \Phi \left(\frac{d - a_y}{\sigma_y} \right) \right]. \quad (2.245)$$

Во многих случаях математические ожидания ошибок X и Y равны нулю, центр прямоугольника расположен в начале координат, а сам прямоугольник имеет равные стороны, т. е. является квадратом. Тогда формула (2.245) упрощается:

$$p = \Phi \left(\frac{a_0}{\sigma_x} \right) \Phi \left(\frac{a_0}{\sigma_y} \right), \quad (2.246)$$

где a_0 — половина длины стороны квадрата (рис. 2.57).

Довольно часто заданная плоская область (например, в случае морской цели) не является прямоугольником, а ошибки попадания, вычисленные в каких-либо двух взаимно перпендикулярных направлениях, не являются независимыми.

Для определения вероятности попадания в этих случаях поступают следующим образом. Определяют направление главных осей рассеивания ξ, η , т. е. осей, в направлении которых ошибки попадания являются независимыми. Угол поворота α главных осей рассе-

вания относительно направлений отсчета ошибок X и Y (рис. 2.58) находится по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}, \quad (2.247)$$

где r_{xy} — коэффициент корреляции ошибок X и Y ;

σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения ошибок X и Y .

Математические ожидания a_ξ и a_η и средние квадратические отклонения σ_ξ и σ_η ошибок в направлении главных осей находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha \\ a_\eta &= -a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.248)$$

где a_x и a_y — математические ожидания ошибок X и Y ;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + r_{xy} \sigma_x \sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_\eta^2 &= \sigma_x^2 \sin^2 \alpha - r_{xy} \sigma_x \sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.249)$$

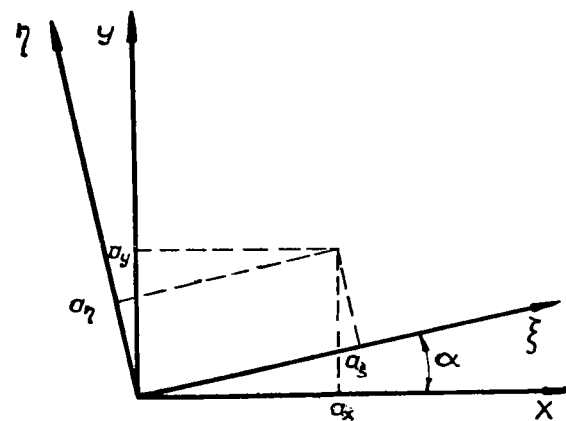


Рис. 2.58. Главные оси рассеивания

После того как определено положение главных осей ξ и η , средние квадратические отклонения и математические ожидания ошибок в направлении главных осей, переходят к вычислению вероятности попадания. На практике для вычисления вероятности попадания в область произвольной формы применяются следующие приближенные способы.

а) Заданная область приближенно заменяется площадью, составленной из прямоугольников, стороны которых параллельны главным осям рассеивания. Вероятность попадания в каждый из таких прямоугольников ввиду независимости ошибок в направлении его сторон вычисляется указанным выше способом. Вероятность попадания в заданную область будет равна сумме полученных вероятностей.

Этот способ можно рекомендовать тогда, когда число прямоугольников, на которые приближенно разбивается область, не слишком велико.

б) Вся плоскость, на которой изображена заданная область, с помощью некоторой системы линий разбивается на ряд ячеек, вероятность попадания в которые заранее вычислена. Такая система линий называется сеткой рассеивания. При этом можно строить область в масштабе сетки или сетку в масштабе области. Если область имеет сложные очертания и особенно если она сравнительно невелика, бывает удобнее построить на изображении области в том же масштабе ту часть сетки, которая занята областью. Если область имеет простые очертания и довольно велика, то удобнее строить область в масштабе сетки. При этом центр сетки накладывается на точку, координаты которой соответствуют математическим ожиданиям ошибок, а оси сетки направляются по главным осям рассеивания.

Обычно пользуются прямолинейной сеткой рассеивания. На рис. 2.59 представлены примеры таких сеток, выполненных в масштабе вероятного отклонения $E \approx 0,675\sigma$.

Для определения направления главных осей рассеивания необходимо знать коэффициент корреляции r_{xy} ошибок X и Y . Рассмотрим способ определения коэффициента корреляции в одном часто встречающемся случае.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + \sum_{i=1}^m A_i U_i \\ Y &= Y_0 + \sum_{i=1}^m B_i U_i \end{aligned} \right\} \quad (2.250)$$

где X_0, Y_0, U_i — независимые между собой случайные величины;

A_i и B_i — коэффициенты.

В данном случае, как легко показать:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i B_i \sigma_i^2}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.251)$$

где σ_i, σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения случайных величин U_i, X и Y .

Перейдем к рассмотрению вероятности попадания снаряда в заданную объемную область.

В качестве заданной объемной области обыкновенно понимают параллелепипед, расположенный над центром цели и имеющий размеры сторон $2a, 2b, 2c$ (рис. 2.60). Таким образом, необходимо знать вероятность попадания в заданный параллелепипед.

Вклейка № 5 к книге «Методы проектирования радиолокационных систем управления реактивными самолетами-снарядами». Том I, книга первая. Воениздат, 1958 г.

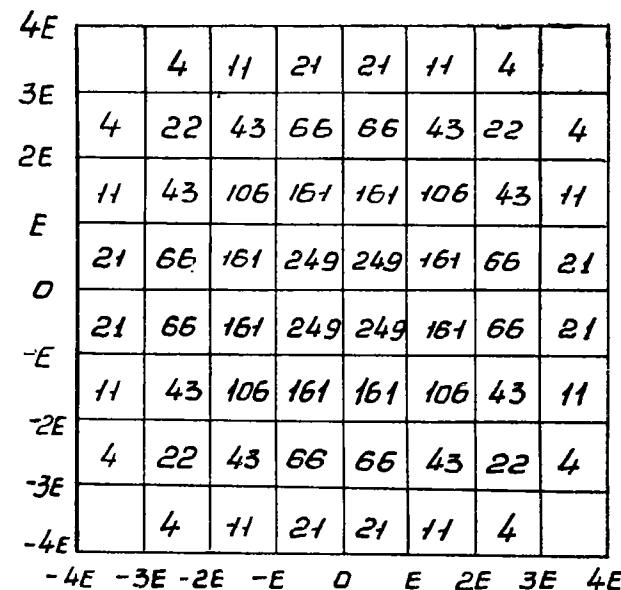
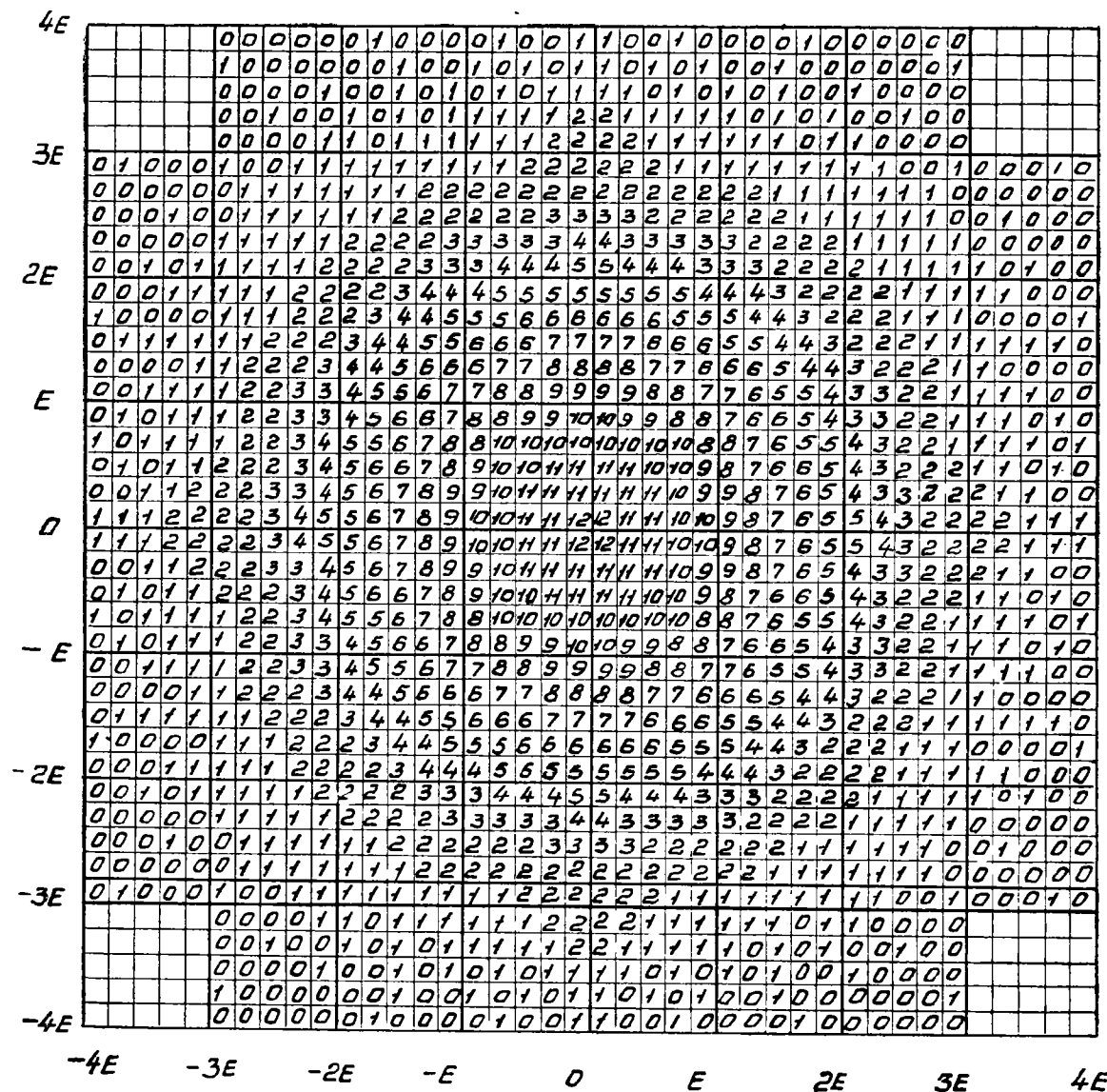


Рис. 2.59. Сетка рассевания. Числа в квадратах дают вероятности в сороковых долях процента

Этот способ можно рекомендовать только в

угольн
ком ве

б)
с помс
вероят
линий
област
област
невели
же мас
имеет
област
точку,
даниям
сеивани

Объ
рис. 2.
штабе

Для
ходимо
способ
чающей

Пусть

где X_0 ,

A_i

В де

где σ_i, σ

Пере
данную

В ка
паралле
меры ст
вероятнс

Пусть ошибки попадания измеряются относительно центра параллелепипеда; тогда вероятность попадания в параллелепипед

$$p = P \left(\begin{array}{l} -a < X < a \\ -b < Y < b \\ -c < Z < c \end{array} \right), \quad (2.252)$$

где X, Y и Z — ошибки попадания в направлении сторон параллелепипеда.

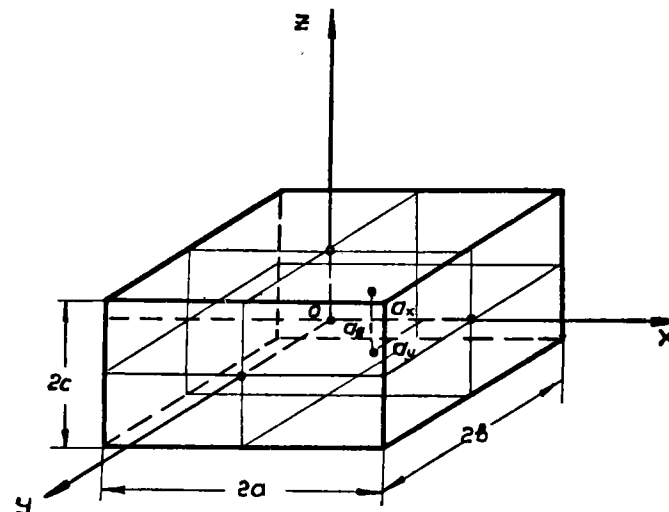


Рис. 2.60

Если ошибка в направлении одной из сторон параллелепипеда, например стороны, параллельной оси OZ , является независимой от ошибок в направлении других сторон, то

$$\begin{aligned} p &= P \left(\begin{array}{l} -a < X < a \\ -b < Y < b \\ -c < Z < c \end{array} \right) = \\ &= P \left(\begin{array}{l} -a < X < a \\ -b < Y < b \end{array} \right) P(-c < Z < c). \end{aligned} \quad (2.253)$$

Вероятность $P \left(\begin{array}{l} -a < X < a \\ -b < Y < b \end{array} \right)$ равна вероятности попадания в заданный прямоугольник. Методы вычисления этой вероятности указывались выше.

Вероятность

$$P(-c < Z < c) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{c-a_z}{\sigma_z}\right) + \Phi\left(\frac{c+a_z}{\sigma_z}\right) \right], \quad (2.254)$$

где a_z и σ_z — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ошибки попадания Z .

Если же ошибки в направлении всех трех сторон параллелепипеда являются взаимно независимыми, то

$$\begin{aligned} p &= P\left(\begin{array}{l} -a < X < a \\ -b < Y < b \\ -c < Z < c \end{array}\right) = \\ &= P(-a < X < a) P(-b < Y < b) P(-c < Z < c) = \\ &= \frac{1}{8} \left[\Phi\left(\frac{a-a_x}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{a+a_x}{\sigma_x}\right) \right] \left[\Phi\left(\frac{b-a_y}{\sigma_y}\right) + \Phi\left(\frac{b+a_y}{\sigma_y}\right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\Phi\left(\frac{c-a_z}{\sigma_z}\right) + \Phi\left(\frac{c+a_z}{\sigma_z}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.255)$$

где a_x, a_y, a_z и $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — математические ожидания и средние квадратические отклонения ошибок X, Y и Z .

2. Вероятность попадания при стрельбе несколькими снарядами

Рассмотрим вероятность попадания хотя бы одного снаряда при стрельбе серией в несколько выстрелов.

Если ошибки при различных выстрелах независимы, то вероятность попадания хотя бы одного снаряда при n выстрелах равна

$$p_{1n} = 1 - (1 - p)^n, \quad (2.256)$$

где p — вероятность попадания одного снаряда.

На рис. 2.61 представлена зависимость вероятности p_{1n} от вероятности p для значений $n=2, 3$ и 4 . Из рисунка видно, например, что если вероятность попадания одного снаряда равна $p=0,7-0,8$, то вероятность попадания хотя бы одного снаряда при трех выстрелах будет практически близка к единице.

Если ошибки при различных выстрелах полностью зависимы, то вероятность попадания хотя бы одного снаряда при n выстрелах будет равна только вероятности попадания при стрельбе одним снарядом, т. е.

$$p_{1n} = p.$$

Таким образом, зависимость или независимость ошибок при различных выстрелах существенным образом влияет на вероятность попадания хотя бы одного снаряда при стрельбе серией.

В ряде случаев ошибки при различных выстрелах серии являются не полностью независимыми. Так, например, при стрельбе несколькими снарядами случайная составляющая ошибки из-за наличия ветра или ошибки в привязке к местности будет одинаковой для всех выстрелов данной серии, а другие случайные составляющие будут

для каждого выстрела различными. Отсюда возникает необходимость оценки изменения вероятности попадания хотя бы одного снаряда за счет зависимости ошибок при различных выстрелах.

Рассмотрим вероятность попадания в заданный отрезок (например, по дальности) хотя бы одного снаряда при стрельбе серией для случая, когда ошибки при различных выстрелах являются зависимыми.

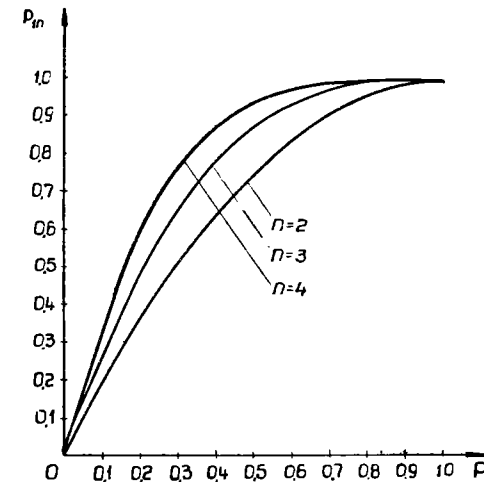


Рис. 2.61. Зависимость вероятности p_{1n} от вероятности p при $n=2, 3$ и 4

Пусть

n — число выстрелов серии;

l_i — ошибка попадания при i -м выстреле, отсчитываемая от центра отрезка:

$$l_i = X + X_i \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

X — случайная составляющая ошибки, общая для всех выстрелов серии;

X_i — случайная составляющая ошибки, различная для каждого выстрела серии;

X, X_1, X_2, \dots, X_n — независимые между собой случайные величины;

$f_0(\eta)$ и $F_0(\eta)$ — дифференциальный и интегральный законы распределения случайной величины $\eta=X$;

$f(\eta)$ и $F(\eta)$ — дифференциальный и интегральный законы распределения случайных величин

$$\eta = X_1, \quad \eta = X_2, \dots, \eta = X_n;$$

$2a$ — длина отрезка;

p — вероятность попадания одного снаряда;

p_{1n} — вероятность попадания хотя бы одного снаряда при стрельбе серией из n выстрелов.

Условие попадания снаряда в отрезок:

$$|l_i| < a \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Вероятность попадания хотя бы одного снаряда данной серии равна единице минус вероятность непадания всех снарядов:

$$p_{1n} = 1 - P[(|l_1| > a), \text{ и } (|l_2| > a), \text{ и } \dots, \text{ и } (|l_n| > a)]. \quad (2.257)$$

Подставляя в соотношение (2.257) $l_i = X + X_i$, для определенного значения X получаем

$$p_{1nx} = 1 - P\{[(X_1 > a - X) \text{ или } (X_1 < -a - X)], \text{ и } \dots, \text{ и } [(X_n > a - X) \text{ или } (X_n < -a - X)]\}.$$

Учитывая, что величина X является случайной и имеет закон распределения $f_0(\eta)$, из последнего выражения можно получить

$$p_{1n} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\eta) P\{[(X_1 > a - \eta) \text{ или } (X_1 < -a - \eta)], \text{ и } \dots, \text{ и } [(X_n > a - \eta) \text{ или } (X_n < -a - \eta)]\} d\eta. \quad (2.258)$$

События

$$[X_i > a - \eta] \text{ или } [X_i < -a - \eta]$$

и

$$[(X_k > a - \eta) \text{ или } (X_k < -a - \eta)]$$

при $i \neq k$ есть независимые события. Следовательно,

$$p_{1n} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\eta) P[(X_1 > a - \eta) \text{ или } (X_1 < -a - \eta)] \dots [(X_n > a - \eta) \text{ или } (X_n < -a - \eta)] d\eta. \quad (2.259)$$

События $X_i > a - \eta$ и $X_i < -a - \eta$ являются несовместными. Отсюда

$$P[(X_i > a - \eta) \text{ или } (X_i < -a - \eta)] = P(X_i > a - \eta) + P(X_i < -a - \eta). \quad (2.260)$$

Далее,

$$P(X_i > a - \eta) = 1 - F(a - \eta); \\ P(X_i < -a - \eta) = F(-a - \eta).$$

Отсюда

$$P[(X_i > a - \eta) \text{ или } (X_i < -a - \eta)] = 1 - F(a - \eta) + F(-a - \eta) \quad (2.261)$$

при любом i .

Из соотношений (2.259), (2.260) и (2.261) получаем

$$p_{1n} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\eta) [1 - F(a - \eta) + F(-a - \eta)]^n d\eta. \quad (2.262)$$

Если случайные величины X и X_1, X_2, \dots, X_n подчинены нормальному закону распределения и имеют математические ожидания, равные нулю, то

$$f_0(\eta) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_0^2}}; \quad F_0(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\eta}{\sigma_0}\right);$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}; \quad F(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\right),$$

где σ_0 и σ — средние квадратические значения составляющих ошибок соответственно X и X_i при любом i ;

Φ — интеграл вероятности.

Подставляя эти выражения в соотношение (2.262), получаем

$$p_{1n} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_0^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a+\eta}{\sigma}\right) \right] \right\}^n d\eta.$$

Учитывая четность подынтегральной функции и произведя замену $\frac{\eta}{\sigma_0} = t$, получаем

$$p_{1n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma_0}{\sigma} t\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma} + \frac{\sigma_0}{\sigma} t\right) \right] \right\}^n dt. \quad (2.263)$$

Введем обозначения:

σ_t — среднее квадратическое значение ошибки при каждом выстреле:

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 + \sigma^2;$$

r — коэффициент корреляции ошибок при различных выстрелах.

Тогда

$$r = \frac{M[l_i l_k]}{\sqrt{M[l_i^2] M[l_k^2]}} = \frac{M[(X + X_i)(X + X_k)]}{\sigma_t^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}. \quad (2.264)$$

Если составляющая X , общая для ошибок при всех выстрелах одной серии, отсутствует, т. е. если $\sigma_0 = 0$, то $r = 0$, и, следовательно, ошибки независимы. Если же ошибки при всех выстрелах серии равны, т. е. если $\sigma = 0$, то $r = 1$, а ошибки являются полностью зависимыми.

С учетом введенных обозначений формула (2.263) приобретает вид

$$p_{1n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\frac{a}{\sigma_1}}{\sqrt{1-r}} - \sqrt{\frac{r}{1-r}} t \right) + \Phi \left(\frac{\frac{a}{\sigma_1}}{\sqrt{1-r}} + \sqrt{\frac{r}{1-r}} t \right) \right] \right\}^n dt. \quad (2.265)$$

На рис. 2.62 и 2.63 представлена зависимость вероятностей p_{12} и p_{13} (вероятностей попадания хотя бы одного снаряда при стрельбе сериями в два и три снаряда) от коэффициента корреляции r для различных значений $\frac{a}{\sigma_1}$.

Из рисунков видно, что для $r \leq 0,5$ вероятности p_{12} и p_{13} мало меняются и примерно равны значениям их при $r=0$, т. е. ошибки можно считать практически независимыми. Следовательно, расчет вероятностей можно производить по формуле

$$p_{1n} \approx 1 - (1 - p)^n. \quad (2.266)$$

При $0,5 < r \leq 1$ ошибки считать независимыми нельзя. В этом случае для определения вероятности p_{12} и p_{13} следует пользоваться формулой (2.265). Следует отметить, что если для r , близких к нулю ($r \leq 0,5$), ошибки можно считать полностью независимыми, то для r , близких к единице, ошибки считать полностью зависимыми нельзя ввиду резкого изменения p_{12} и p_{13} в районе значений $r=1$. Таким образом, даже незначительное уменьшение r при величине его, близкой к единице, приводит к заметному увеличению вероятности попадания относительно значения ее при стрельбе одним снарядом.

Так как в большинстве случаев ошибки при различных выстрелах не являются полностью зависимыми, то вероятность попадания при стрельбе сериями будет заведомо больше вероятности попадания при стрельбе одним снарядом.

2.5. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

Известные аналитические методы расчета систем управления, содержащих переменные параметры и нелинейные элементы, в силу громоздкости и трудности расчетов в ряде случаев практически неприменимы. Как указывалось выше, весьма рациональным методом расчета подобных систем является численное интегрирование описывающих их дифференциальных уравнений с применением вычислительных машин.

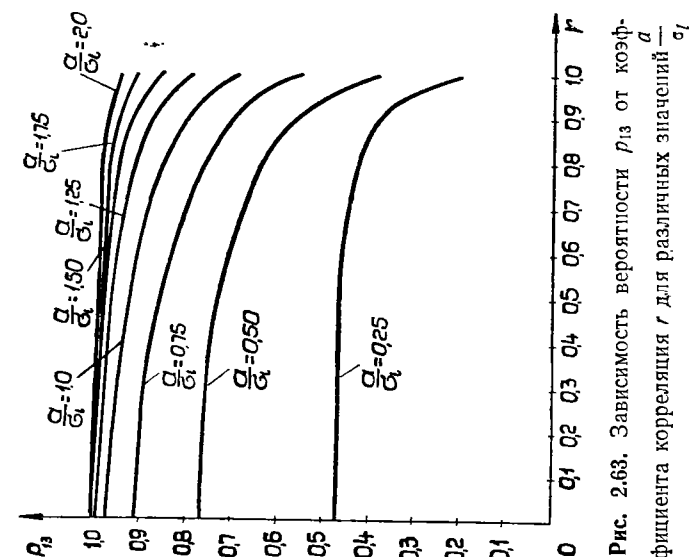


Рис. 2.63. Зависимость вероятности p_{13} от коэффициента корреляции r для различных значений $\frac{a}{\sigma_1}$.

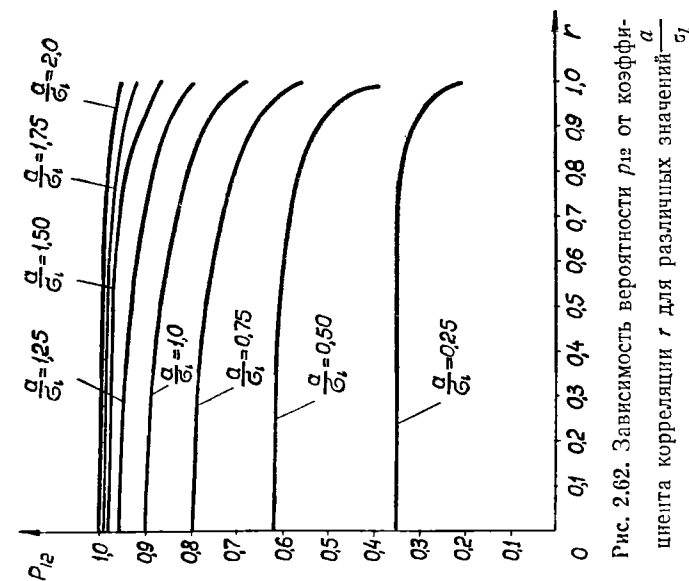


Рис. 2.62. Зависимость вероятности p_{12} от коэффициента корреляции r для различных значений $\frac{a}{\sigma_1}$.

Однако при этом требуется предварительное программирование решаемой задачи. Кроме того, при таком исследовании систем управления обязательно требуется детальное и точное математическое описание процессов, происходящих в их отдельных элементах.

Указанные трудности почти полностью устраняются, если исследование систем управления производить путем их моделирования. Поэтому моделирование находит широкое применение при проектировании и исследовании систем управления.

Моделирование систем управления заключается в экспериментальном исследовании их моделей. Различают два основных метода моделирования: физическое и математическое.

При физическом моделировании модель от оригинала отличается только масштабами исследуемых величин. Происходящие же в ней явления имеют ту же физическую природу, что и в оригинале. Законы построения физических моделей рассматриваются теорией подобия. При проектировании систем управления физическое моделирование применяется в процессе разработки снарядов и анализа их аэродинамических характеристик. Продувки в аэродинамических трубах геометрически подобных моделей позволяют определить аэродинамические характеристики снаряда до его изготовления и испытания.

Математическое моделирование основывается на том, что процессы, происходящие в различных физических системах, могут описываться одинаковыми математическими уравнениями. Математическое моделирование осуществляется с помощью моделей — физических аналогий или с помощью решающих устройств.

Моделирование с помощью физических аналогий заключается в переносе изучения явлений на модели отличной от оригинала физической природы. Примером математического моделирования с помощью физических аналогий является моделирование движения снаряда относительно центра тяжести на электродинамическом стенде.

Моделирование с помощью решающих устройств не дает прямой аналогии между величинами, характеризующими изучаемое явление в оригинале, и величинами, получаемыми в результате решения задачи на модели. Однако метод математического моделирования, базирующийся на использовании решающих устройств, является основным методом моделирования при исследовании систем управления. Он позволяет с помощью одной модели осуществить решение целого класса задач, обеспечивает быстроту и легкость перехода от решения одной задачи к решению другой задачи, дает возможность введения различных начальных условий, систематических и случайных воздействий, использования реальных элементов системы управления в процессе моделирования и т. д. В связи с этим моделирующие установки, выполненные на основе решающих устройств, и в особенности электронные моделирующие установки, нашли наиболее широкое распространение.

В настоящем разделе рассматривается только вопрос моделирования на электронных установках.

1. Электронные модели и их решающие элементы

Наиболее распространенными электронными моделями являются электронные модели постоянного тока.

Основными решающими элементами (функциональными блоками) таких электронных моделей являются:

- а) блок изменения знака;
- б) блок изменения масштаба;
- в) блок интегрирования;
- г) блок суммирования;
- д) блок постоянного коэффициента;
- е) блок переменного коэффициента;
- ж) блок воспроизведения функциональной зависимости;
- з) блок умножения;
- и) блок деления.

Обозначения функциональных блоков приведены на рис. 2.64.

Рассмотрим работу каждого из блоков в отдельности.

Блоки изменения знака, изменения масштаба, интегрирования и суммирования представляют собой операционные усилители — усилители постоянного тока с большими внутренними коэффициентами усиления и глубокими отрицательными обратными связями.

Блок-схема операционного усилителя показана на рис. 2.65.

При достаточно большом значении внутреннего коэффициента усиления k передаточная функция операционного усилителя равна отношению изображений $U_{\text{вых}}(p)$ и $U_{\text{вх}}(p)$ напряжений на выходе $U_{\text{вых}}$ и входе $U_{\text{вх}}$ усилителя:

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)},$$

где $Z_2(p)$ и $Z_1(p)$ — передаточные функции сопротивлений z_2 и z_1 в цепи обратной связи и во входной цепи усилителя.

В зависимости от вида передаточных функций $Z_2(p)$ и $Z_1(p)$ операционный усилитель может быть блоком изменения знака, блоком изменения масштаба или блоком интегрирования.

Блок изменения масштаба получается, когда

$$Z_1(p) = R_1 \text{ и } Z_2(p) = R_2,$$

где R_1 и R_2 — активные сопротивления. В этом случае

$$K(p) = -m,$$

где $m = \frac{R_2}{R_1}$ — масштабный коэффициент.

При $R_2 = R_1$ операционный усилитель становится блоком изменения знака.

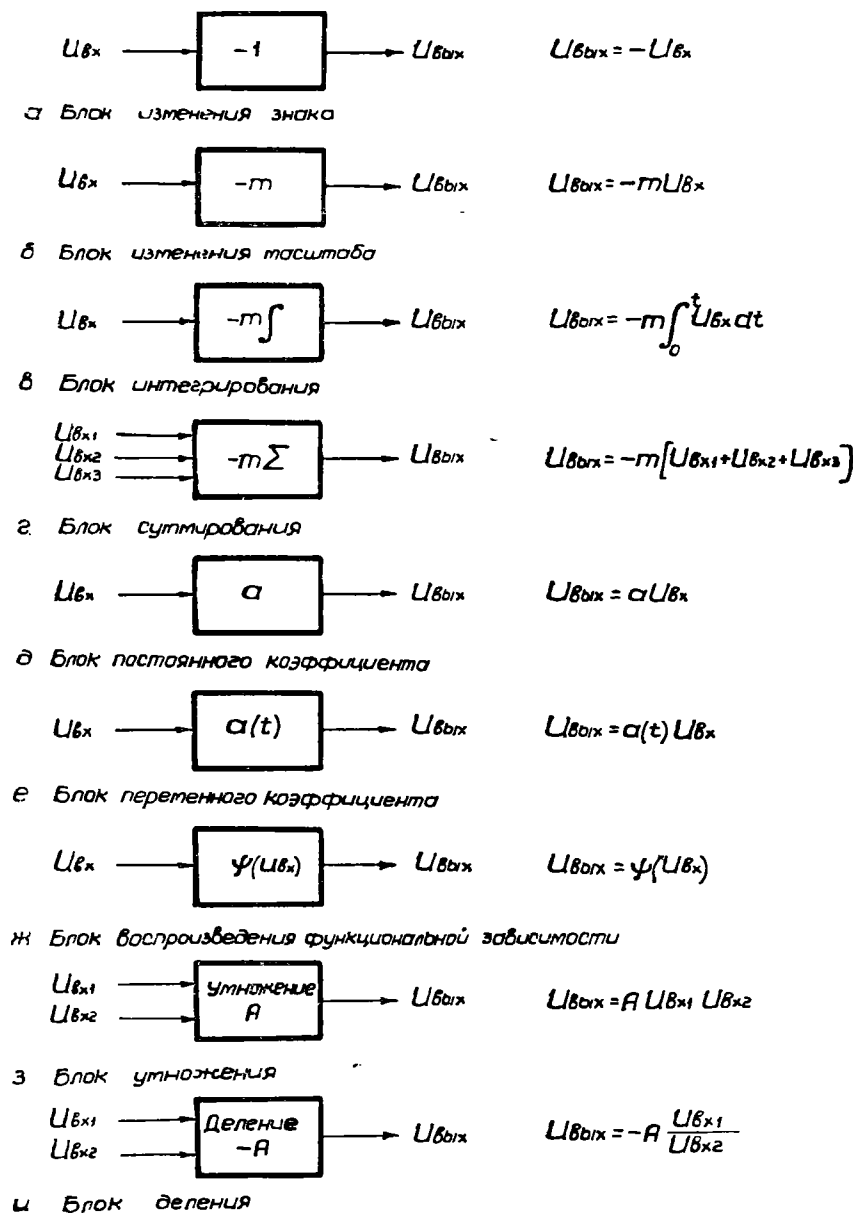


Рис. 2.64. Функциональные блоки и их обозначения

Если

$$Z_1(p) = R \text{ и } Z_2(p) = \frac{1}{Cp},$$

где R и C — активное сопротивление и емкость, то операционный усилитель становится блоком интегрирования с передаточной функцией

$$K(p) = -\frac{m}{p},$$

где $m = \frac{1}{RC}$ — масштабный коэффициент.

Блоки изменения знака, изменения масштаба и интегрирования обыкновенно имеют несколько входов, т. е. могут являться одновременно и блоками суммирования.

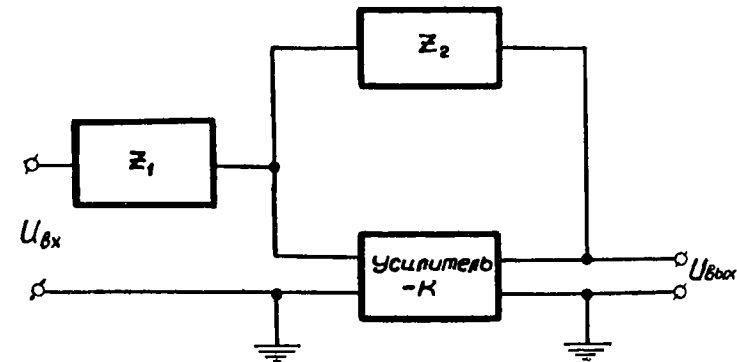


Рис. 2.65. Блок-схема операционного усилителя

Блок суммирования представляет собой операционный усилитель с несколькими входами; при n входах

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p) U_{\text{вх}i}(p),$$

где $U_{\text{вых}}(p)$ — изображение напряжения на выходе операционного усилителя;

$U_{\text{вх}i}(p)$ — изображение напряжения на i -м входе операционного усилителя;

$K_i(p)$ — передаточные функции операционного усилителя от i -го входа до выхода усилителя.

Если $K_i(p)$ равны между собой и $K_i(p) = -m$, то

$$U_{\text{вых}}(p) = -m \sum_{i=1}^n U_{\text{вх}i}(p)$$

или

$$u_{\text{вых}} = -m \sum_{i=1}^n u_{\text{вх}i}.$$

Блок постоянного коэффициента (рис. 2.66) выполняется обычно в виде делителя напряжения, с движка которого снимается напряжение

$$u_{\text{вых}} = au_{\text{вх}},$$

где a — отношение сопротивления r участка потенциометра к сопротивлению R_0 всего потенциометра.

Величина a меньше или равна единице и в зависимости от типа применяемого потенциометра может принимать любые или дискретные значения от 0 до 1.

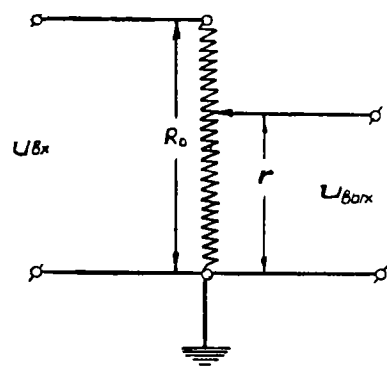


Рис. 2.66. Схема блока постоянного коэффициента

Блок переменного коэффициента выполняется обычно также в виде делителя напряжения, так что

$$u_{\text{вых}} = a(t) u_{\text{вх}},$$

где

$$a(t) \leq 1.$$

Требуемая зависимость коэффициента $a(t)$ от времени осуществляется либо заданием, например, при помощи кулачка соответствующего закона перемещения движка по линейному потенциометру, либо электрической профилировкой потенциометра.

Блоки воспроизведения функциональной зависимости в электронных моделирующих установках чаще всего выполняются на базе схем с диодами.

На рис. 2.67 представлены две схемы с диодами, реализующие простейшие кусочно-линейные зависимости между входным и выходным напряжениями, характеризующиеся для заданных значений опорного напряжения $u_{\text{оп}}$ параметрами u_n и φ . Суммируя выходные напряжения нескольких подобных схем, можно получить кусочно-линейную аппроксимацию практически любой однозначной функциональной зависимости. Например, для функциональной зависимости, изображенной на рис. 2.68, блок воспроизведения функциональной зависимости может быть выполнен на четырех схемах с диодами.

В ряде случаев блоки воспроизведения функциональной зависимости выполняются с помощью следящей системы и делителя напряжения. Пусть напряжение, питающее потенциометр, равно u_0 , тогда напряжение на выходе делителя $u_{\text{вых}}$

$$u_{\text{вых}} = \frac{r}{R_0} u_0,$$

где R_0 — сопротивление всего потенциометра;

r — сопротивление участка потенциометра, положение движка которого зависит от $u_{\text{вх}}$.

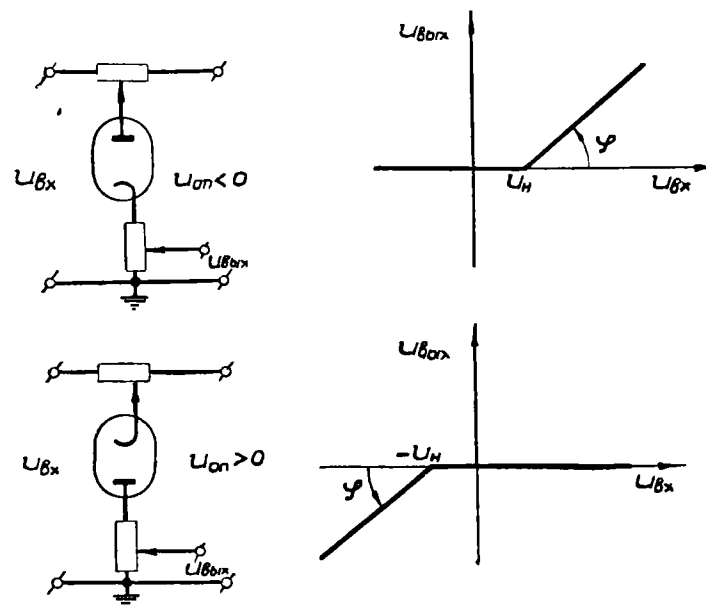


Рис. 2.67. Схемы с диодами, реализующие простейшие кусочно-линейные зависимости между входным и выходным напряжениями

Блок умножения величин $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$ (рис. 2.69) можно построить из блоков суммирования и изменения знака и блоков, воспроизводящих функциональную зависимость

$$u_a = cu_b^2,$$

где u_a и u_b — входное и выходное напряжения этих блоков; c — постоянный коэффициент.

На вход двух блоков, воспроизводящих указанную функциональную зависимость, подаются напряжения $u_{\text{вх1}} + u_{\text{вх2}}$ и $u_{\text{вх1}} - u_{\text{вх2}}$. Тогда напряжением на выходе блока умножения может служить разность напряжений на выходе этих функциональных блоков. Действительно,

$$u_{\text{вых}} = c[(u_{\text{вх1}} + u_{\text{вх2}})^2 - (u_{\text{вх1}} - u_{\text{вх2}})^2] = 4cu_{\text{вх1}}u_{\text{вх2}}$$

или

$$u_{\text{вых}} = Au_{\text{вх1}}u_{\text{вх2}},$$

где

$$A = 4c.$$

Блок деления величины $u_{\text{вх1}}$ на величину $u_{\text{вх2}}$ (рис. 2.70) выполняется на усилителе постоянного тока с большим коэффициентом усиления, в цепи обратной связи которого включается блок умноже-

ния. При достаточно большом коэффициенте усиления k усилителя справедливо соотношение

$$u_{\text{вых}} = -A \frac{u_{\text{вх1}}}{u_{\text{вх2}}},$$

где A — постоянный коэффициент.

Указанные решающие элементы (функциональные блоки), входящие в состав электронных моделей, позволяют производить исследование систем управления весьма широкого класса.

Электронные модели по задачам, которые можно решать с их помощью, делятся на модели линейные и нелинейные.

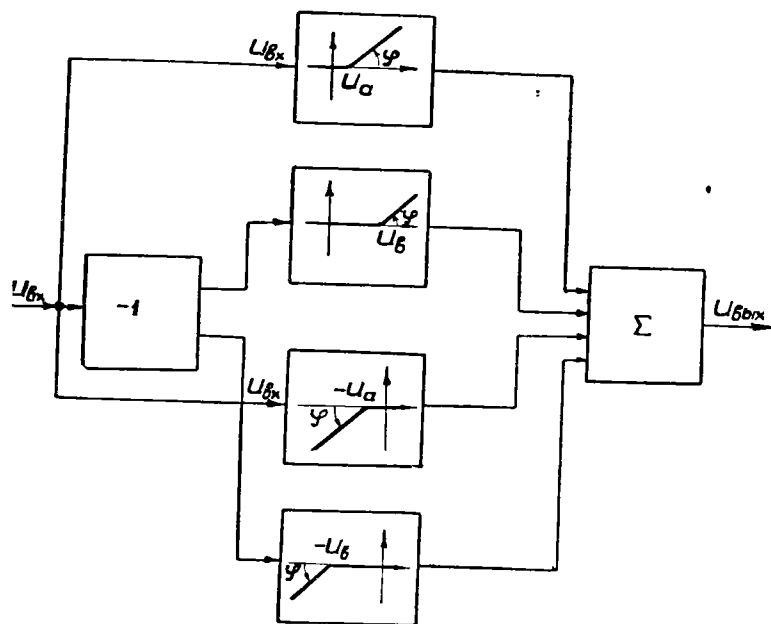
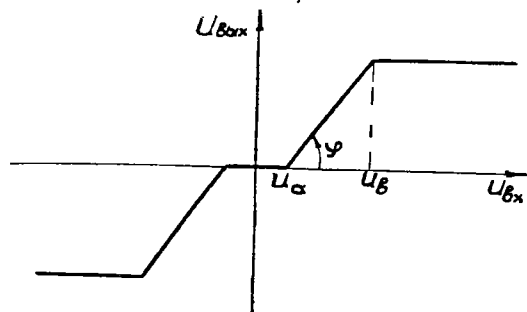


Рис. 2.68. Функциональная зависимость $u_{\text{вых}}$ от $u_{\text{вх}}$ и блок воспроизведения ее, выполненный на четырех схемах с диодами

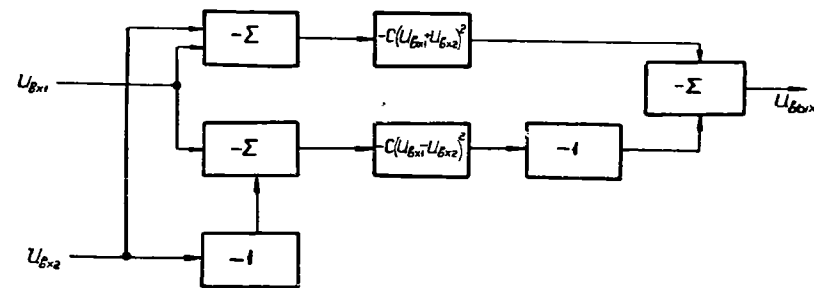


Рис. 2.69. Структурная схема блока умножения

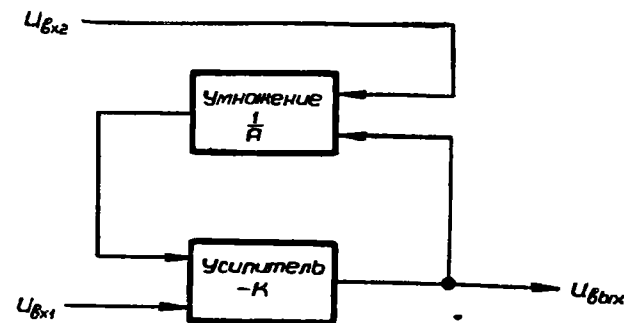


Рис. 2.70. Структурная схема блока деления

Однако это разделение является несколько искусственным, так как в настоящее время имеются нелинейные блоки, которые могут быть использованы как при моделировании на линейной модели, так и при моделировании на нелинейной модели. К линейным моделям относятся, например, модели ИПТ-4, ИПТ-5, МПТ-9. К нелинейным моделям — модели МПТ-11, МН-1, МН-2, МН-3, МН-7, МН-8, «Электрон».

По способу соединения между собой отдельных функциональных блоков при наборе задачи линейные электронные модели делятся на модели матричного и структурного типа. Примером модели матричного типа является модель ИПТ-4. Набор задачи на моделях матричного типа производится включением соответствующих функциональных блоков, расположенных в виде матрицы.

Примером моделей структурного типа являются модели ИПТ-5, МПТ-9. В этих моделях набор задачи осуществляется в соответствии со структурой уравнений исследуемой системы управления. Основными преимуществами моделей структурного типа являются: большая гибкость в использовании отдельных решающих элементов, обеспечивающая решение поставленных задач с минимальным числом элементов, и наглядность собираемых на модели структурно-функциональных схем.

В табл. 2.6 даны основные характеристики некоторых существующих в настоящее время электронных моделирующих установок.

Таблица 2.6

Название модели	Тип	Порядок решаемых уравнений	Количество блоков				
			постоянного коэффициента	переменного коэффициента	воспроизведения функциональной зависимости от одной переменной	умножения	воспроизведения функциональной зависимости от двух переменных
ИПТ-4	Линейная	6	25	25	—	—	—
ИПТ-5	Линейная	9	18	18	—	—	—
МПТ-9	Линейная	16	48	48	—	—	—
МПТ-11	Нелинейная	12	24	—	18	6	—
МН-1	Нелинейная	12	36	6	21	20	2
МН-2	Нелинейная	6	6	2	10	10	—
МН-3	Нелинейная	9	16	—	16	30	—
МН-8	Нелинейная	32	48	36	59	12	—
„Электрон“	Нелинейная	40—55	120	50	90	90	—

Помимо указанных выше моделей, пригодных для исследования широкого класса систем управления, иногда делаются специальные модели, предназначенные для решения специальных узких задач. Такого рода модели имеют обычно вполне определенную структуру и не требуют предварительного выбора масштабов; значение параметров исследуемой системы управления устанавливается в ней непосредственно. Применение специальных моделей оправдано в тех случаях, когда требуется длительная работа по моделированию аналогичных схем систем управления.

Основные погрешности при моделировании возникают за счет неточностей реализации отдельных математических операций и дрейфа нулей усилителей постоянного тока. Погрешность каждого решающего блока обычно не превосходит 1—1,5% от рабочего диапазона блока. Погрешность моделирования сильно зависит от характера решаемой задачи и времени ее решения, однако, как правило, в наихудших условиях не превосходит 10—15%.

2. Моделирование на электронных моделях

Рассмотренные выше электронные модели и отдельные решающие элементы дают возможность составить схему моделирования, процессы в которой будут описываться такими же уравнениями, что и процессы в реальной системе управления, с точностью до допущений, принятых при получении уравнений системы управления и уравнений решающих элементов модели. Для проведения исследования на модели уравнения системы управления предварительно преобразовываются к виду, удобному для моделирования.

Набор исследуемой задачи на модели производится следующим образом.

а) Уравнения системы управления приводятся к системе дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраических уравнений.

б) На основании опыта или предварительного расчета определяются максимальные значения $x_{i\max}$ переменных величин x_i , т. е. такие значения, для которых заведомо будет выполнено условие

$$x_i \leq x_{i\max}.$$

в) Определяются масштабные коэффициенты по формуле

$$m_i = \frac{u_{i\max}}{x_{i\max}},$$

где m_i — масштабный коэффициент переменной величины;

$x_{i\max}$ — максимальное значение переменной величины;

$u_{i\max}$ — максимальное значение переменной величины модели u_i , определяемое рабочей зоной соответствующего решающего элемента;

u_i — переменная величина модели, соответствующая переменной величине x_i .

г) В уравнениях, описывающих систему управления, производится замена переменных величин x_i переменными величинами модели u_i по формуле

$$x_i = \frac{u_i}{m_i}.$$

д) По полученным уравнениям составляется структурно-функциональная схема модели, которая набирается на самой модели с помощью решающих элементов, входящих в ее состав.

При моделировании с использованием реальных элементов системы управления необходима специальная аппаратура сопряжения, обеспечивающая сопряжение как выхода модели со входом реальных элементов системы управления, так и выхода реальных элементов системы со входом модели. Аппаратура сопряжения не должна вносить искажений в характеристики исследуемой системы.

В процессе проектирования систем управления на электронных моделях обычно производится решение следующих основных задач:

а) выбор параметров и анализ работы следящих систем измерения координат цели и снаряда с учетом характеристик нелинейных элементов;

б) выбор параметров автопилота, обеспечивающих стабилизацию снаряда относительно центра тяжести с учетом нелинейных характеристик автопилота и наиболее типичных воздействий на систему стабилизации;

в) исследование старта снаряда или отцепки его от самолета-носителя и выбор параметров снаряда, пусковой установки и автопилота, обеспечивающих нормальный старт или отцепку; исследование производится с учетом переменности и нелинейности характеристик снаряда и автопилота, а также с учетом возможных атмосферных воздействий на снаряд;

г) исследование режима наведения или самонаведения снаряда с целью выбора параметров системы управления и оценки точности системы.

Исследование производится с учетом переменности и нелинейности характеристик системы управления, с учетом характеристик движения цели и т. д.

Указанные исследования производятся также и с использованием реальных элементов системы управления.

В дальнейшем приводятся структурно-функциональные схемы моделей для различных случаев в связи с изложением вопросов исследования и расчета систем управления.

Рассмотрим в качестве примера моделирование движения снаряда относительно центра тяжести при возмущениях, подаваемых на автопилот.

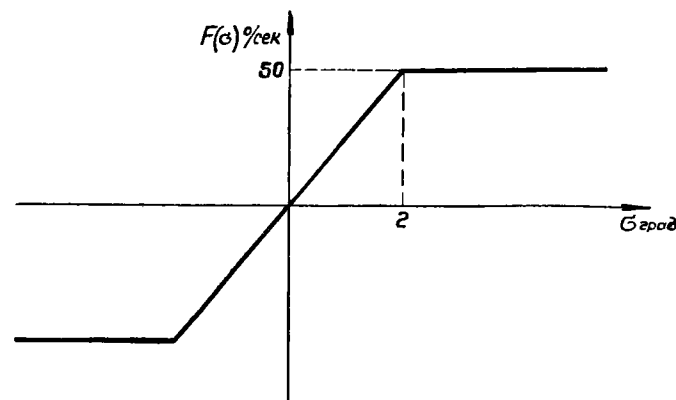


Рис. 2.71. Функция $F(\sigma)$

Пусть уравнения движения снаряда и уравнение автопилота имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vartheta} + a_1 \dot{\vartheta} + a_2 \alpha + a_3 \delta_B &= 0 \\ \dot{\theta} &= a_4 \alpha \\ \alpha &= \vartheta - \theta \\ \dot{\delta}_B &= F[i_B (\vartheta + \mu_B \dot{\vartheta}) - \delta_B + \sigma_0] \end{aligned} \right\}$$

где ϑ , θ , α , δ_B — отклонения угла тангажа, угла наклона траектории, угла атаки и угла отклонения руля высоты от их значений для расчетного режима полета снаряда;

$F(\sigma)$ — скоростная характеристика рулевой машины автопилота, изображенная на рис. 2.71;

σ_0 — возмущение, подаваемое на автопилот;

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,13 \frac{1}{\text{сек}}; \quad a_3 = 4,53 \frac{1}{\text{сек}^2}; \quad i_B = 1; \\ a_2 &= 4,95 \frac{1}{\text{сек}^2}; \quad a_4 = 0,77 \frac{1}{\text{сек}}; \quad \mu_B = 0,15 \text{ сек.} \end{aligned}$$

Приведем систему уравнений к системе уравнений первого порядка и алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} &= -a_1 \dot{\vartheta} - a_2 \alpha - a_3 \delta_B \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \dot{\vartheta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= a_4 \alpha \\ \alpha &= \vartheta - \theta \\ \frac{d\delta_B}{dt} &= F[i_B (\vartheta + \mu_B \dot{\vartheta}) - \delta_B + \sigma_0] \end{aligned} \right\}$$

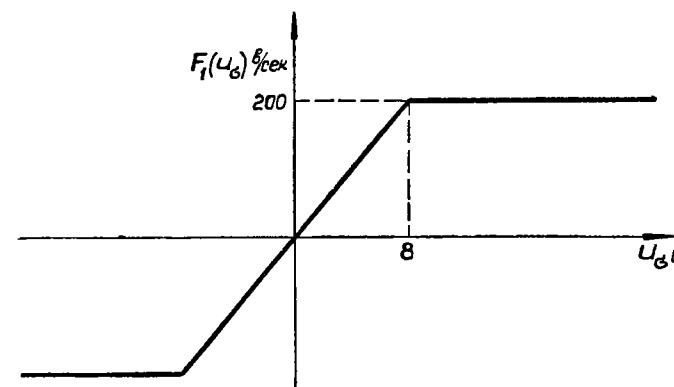


Рис. 2.72. Функция $F_1(u_\sigma)$

Обычно углы ϑ , α , θ и δ_B не превышают 25° , а угловая скорость $\dot{\vartheta}$ не превышает 25 град/сек . Если рабочие зоны решающих элементов равны 100 в, то масштабные коэффициенты можно выбрать равными

$$m_{\sigma_0} = m_{\vartheta} = m_{\alpha} = m_{\theta} = m_{\delta_B} = 4 \text{ в/град};$$

$$m_{\dot{\vartheta}} = 4 \text{ в сек/град.}$$

Переменные величины модели u_{ϑ} , $u_{\dot{\vartheta}}$, u_{α} , u_{δ_B} и u_{σ_0} , соответствующие переменным величинам ϑ , $\dot{\vartheta}$, α , θ , δ_B и σ_0 , будут

$$u_{\vartheta} = m_{\vartheta} \vartheta; \quad u_{\dot{\vartheta}} = m_{\dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}; \quad u_{\alpha} = m_{\alpha} \alpha;$$

$$u_{\theta} = m_{\theta} \theta; \quad u_{\delta_B} = m_{\delta_B} \delta_B; \quad u_{\sigma_0} = m_{\sigma_0} \sigma_0.$$

После замены ϑ на u_{ϑ} , $\dot{\vartheta}$ на \dot{u}_{ϑ} и т. д. получаем уравнения для составления структурно-функциональной схемы модели:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{\dot{\vartheta}}}{dt} &= -1,13u_{\dot{\vartheta}} - 4,95u_{\alpha} - 4,53u_{\vartheta_{\text{в}}} \\ \frac{du_{\vartheta}}{dt} &= u_{\dot{\vartheta}} \\ \frac{du_0}{dt} &= 0,77u_{\alpha} \\ u_{\alpha} &= u_{\vartheta} - u_0 \\ \frac{du_{\vartheta_{\text{в}}}}{dt} &= F_1(u_{\vartheta} + 0,15u_{\dot{\vartheta}} - u_{\vartheta_{\text{в}}} + u_{\vartheta_0}) \end{aligned} \right\}$$

где $F_1(u_{\vartheta})$ — функция, изображенная на рис. 2.72.

Структурно-функциональная схема модели, составленная по этим уравнениям, приведена на рис. 2.73.

В блоках постоянных коэффициентов, изображенных на рис. 2,73, $\bar{a}_1=0,113$; $\bar{a}_2=0,495$; $\bar{a}_3=0,453$; $\bar{a}_4=0,77$; $\bar{a}_5=0,15$.

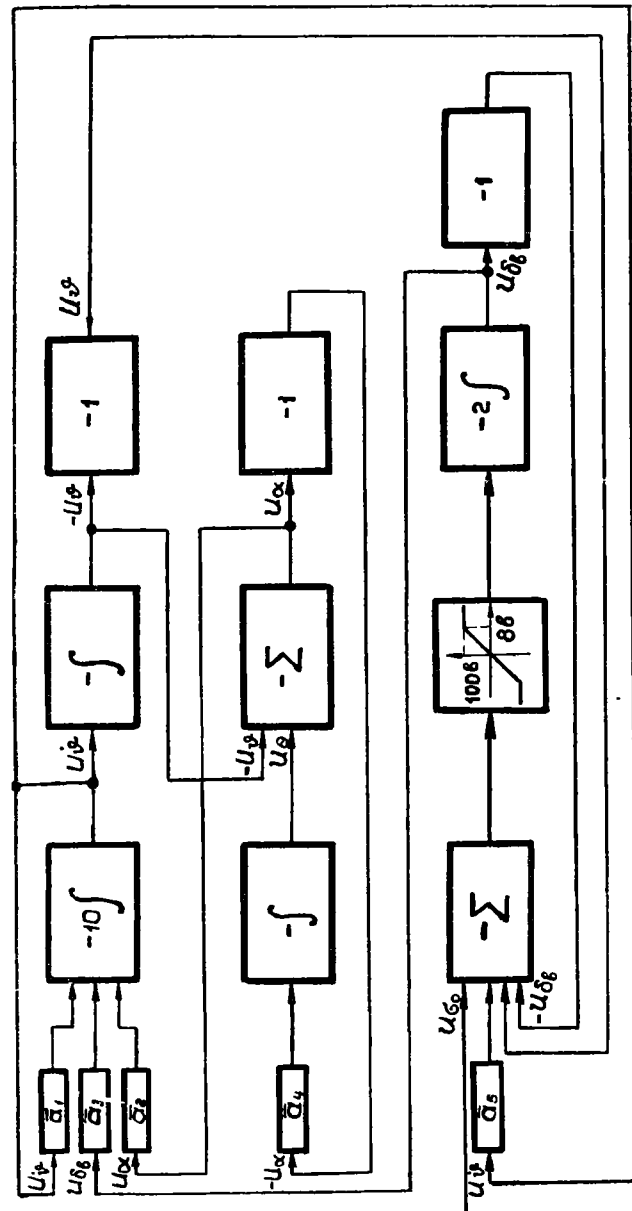


Рис. 2.73. Структурно-функциональная схема модели

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие	3
Глава 1. Методы управления и типы систем управления реактивным снарядами, предназначенными для поражения морских и наземных целей	5
1.1. Методы управления и их классификация	13
1.2. Основные требования, предъявляемые к системам управления	15
1.3. Системы «воздух — море»	—
1. Методы управления и типовые траектории	20
2. Состав системы управления. Самолет-снаряд. Самолет-носитель. Аппаратура управления	24
3. Структурные схемы системы управления	33
1.4. Системы «земля — море»	—
1. Методы управления и типовые траектории	35
2. Особенности самолета-снаряда и аппаратуры управления. Стартовая позиция	—
1.5. Системы «море — море»	36
1.6. Системы «воздух — земля»	38
1.7. Системы «земля — земля»	39
1.8. Системы «море — земля»	40
Глава 2. Методы расчета и анализа систем управления	—
2.1. Анализ устойчивости	41
1. Линейные системы с постоянными коэффициентами	64
2. Импульсные системы	76
3. Нелинейные системы	91
2.2. Построение переходных и установившихся процессов	92
1. Линейные системы с постоянными коэффициентами	114
2. Линейные системы с переменными коэффициентами	119
3. Импульсные системы	125
4. Нелинейные системы	126
5. Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений	131
2.3. Расчет ошибок	—
1. Сведения из теории вероятностей	173
2. Ошибки системы управления от разброса параметров ее элементов	182
3. Ошибки от случайных воздействий	203
2.4. Вычисление вероятности попадания	—
1. Вероятность попадания при стрельбе одним снарядом	208
2. Вероятность попадания при стрельбе несколькими снарядами	212
2.5. Основные сведения о моделировании	215
1. Электронные модели и их решающие элементы	222
2. Моделирование на электронных моделях	—

Редактор *Логинов В. А.*

Технический редактор *Зудина М. П.*

Корректор *Смирнова З. В.*

Сдано в набор 3.4.57 г.

Подписано к печати 7.1.58 г.

Формат бумаги 60×92/16—141/4 печ. л.=14,25 усл. печ. л.+5 вклеек—11/2 печ. л.=1,5 усл. печ. л.

Изд. 5/5858сс

Зак. № 2386