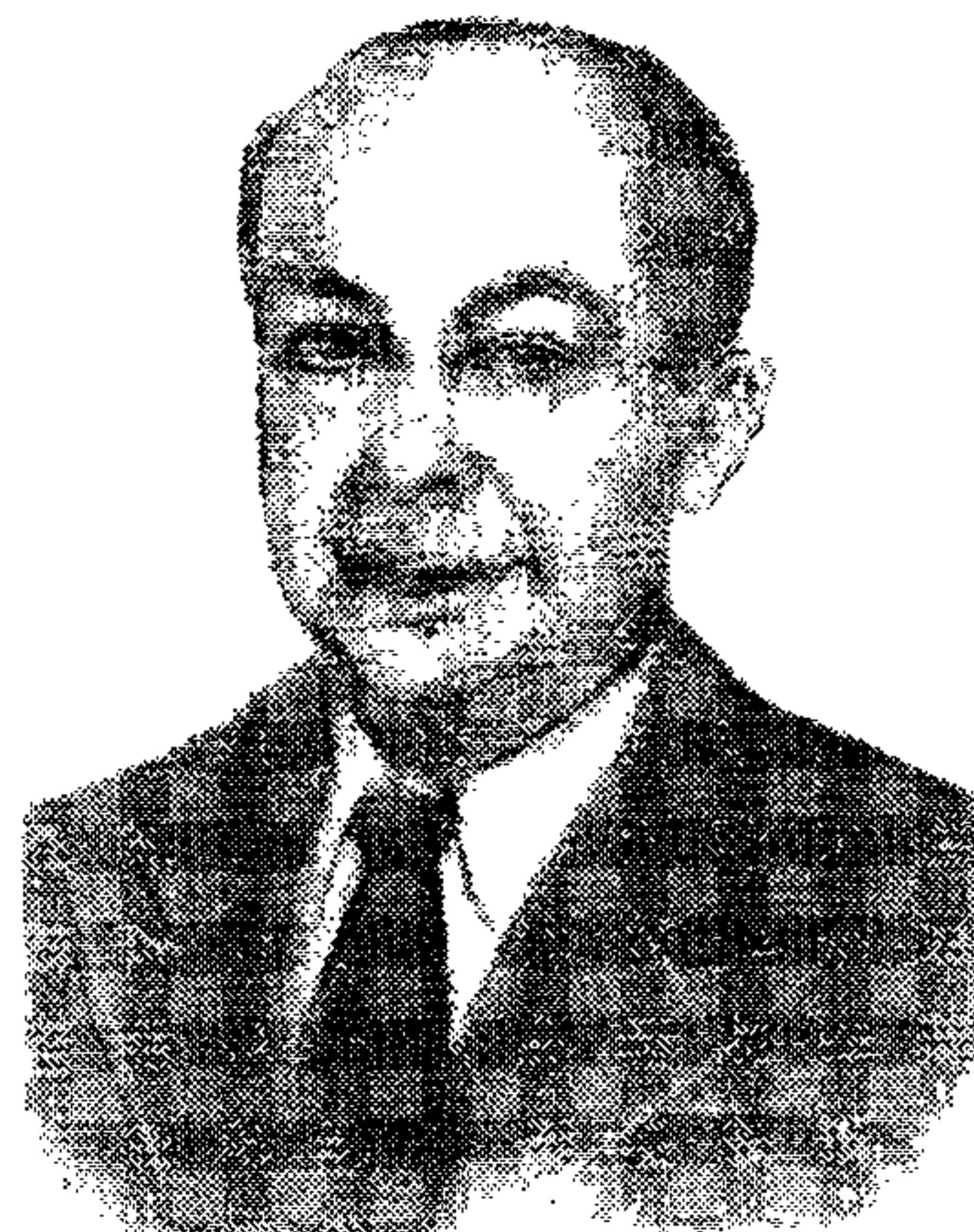


# Logaritmos

## John Von Neumann

Fue el creador de la "teoría matemática de los juegos" que se utiliza en la actualidad en las decisiones empresariales y en la estrategia de la Guerra Fría. Se hizo famoso por su capacidad de solucionar mentalmente problemas que para otros matemáticos requerían coger papel y lápiz o incluso un calculador. Sus colegas a veces se preguntaban si la "rápida iluminación" de su intelecto no sugería "una especie superior al hombre".

Su mente exclusiva, finalmente, lo distinguió de los demás hombres. Después de un accidente de automóvil en Princeton, explicó este hecho de esta manera "Los árboles de la derecha me estaban pasando en sucesión ordenada a 60 millas por hora. De repente, uno de ellos se puso en mi camino".



Si:  $a > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge n \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\log_b m a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

### Regla de cálculo

*Basándose en las propiedades de los logaritmos, se construyó una sencilla máquina de calcular: la regla de cálculo. Neper, descubridor de los logaritmos, fue el que concibió la idea de la regla de cálculo en el siglo XVI. En el año 1671, Gunter construye la primera regla de cálculo con divisiones proporcionales a los logaritmos. La reglilla, en cambio, se debe a Seth Pastridge (1671). Lenoir Granet elaboró en 1820 el prototipo de las reglas de cálculo rectilínea, compuesto de una regla provista de ranura, en la que se puede deslizar una reglilla. En cambio, a Mannheim (1851) se debe el funcionamiento de las escalas y la aplicación del cursor.*

*La regla de cálculo está basada en la propiedades de los logaritmos, sobre todo en la que expresa: "el logaritmo de un producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de esos factores". Con ella pueden efectuarse multiplicaciones, divisiones, proporciones, cuadrados, raíces cuadradas y cúbicas, superficies de círculos y cubos, potencias de orden superior, ecuaciones de primero, segundo, tercero, cuarto y quinto grado, además de las bicuadradas. Utilizando las escalas del revés de la regla móvil, pueden calcularse los logaritmos de los números y todas las líneas trigonométricas.*

*Sus aplicaciones son innumerables. Entre ellas, el contenido de un depósito cilíndrico, la escala de un dibujo, el peso de una viga cuadrada, el cálculo de una placa de cemento armado, de una columna de fundición, etcétera.*

*Este elemento matemático es de gran utilidad para comerciantes, contratistas de obras, carpinteros, contables, banqueros, técnicos electricistas e ingenieros.*



# Logaritmos

## OBJETIVOS

- Reconocer e identificar las propiedades sobre los logaritmos como operadores.
- Resolver ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas aplicando las diferentes propiedades de logaritmos.
- Reconocer la gráfica de una función exponencial y una función logarítmica.

## INTRODUCCIÓN

En la época de los grandes descubrimientos, las operaciones aritméticas fueron clasificadas en tres especies: la primera especie la conformaban las operaciones de adición y sustracción; las de segunda especie eran la multiplicación y la división; la potenciación y radicación eran de tercera especie. Resolver un problema de cálculo aritmético consistía en transformar uno de segunda o tercera especie en una especie inferior (primera especie) de manera que sea más sencilla.

Entonces, el gran problema era hallar un proceso que permitiese transformar las operaciones de potenciación, radicación, multiplicación y división en una adición o sustracción y es así que el matemático y teólogo escocés John Napier (1550 - 1617) publicó la primera tabla de logaritmos en el año 1614, el cual llevaba por título: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, que significa una descripción de la maravillosa regla de los logaritmos. Posteriormente, trabajando en forma independiente, el suizo Jost Bürgi (1552 - 1632), fabricante de instrumentos astronómicos, matemático e inventor, publica su tabla de logaritmos en 1620.

Una tabla de logaritmos consta de dos columnas de números. A cada elemento de la columna de la izquierda le corresponde su logaritmo que es el número ubicado a su derecha.

Si bien es cierto que realizar la tabla de logaritmos no ha sido sencillo; gracias a ella podemos multiplicar dos números sumando logaritmos, dividir dos números restando logaritmos, hallar una potencia multiplicando la base por el índice; es por ello que los logaritmos fueron indispensables durante tres siglos en el cálculo aritmético, el cual actualmente ha sido sustituido por las máquinas electrónicas, sin embargo, siguen ejerciendo un papel importante en el campo de las ciencias químicas, físicas, economía, estadística, etc.

A lo largo de la historia se han establecido muchas tablas de logaritmos, pero la más usada es la de los logaritmos decimales, la cual fue elaborada por el matemático inglés Henry Briggs (1561 - 1631), profesor de la Universidad de Londres y Oxford, en colaboración con Napier.

Actualmente los logaritmos se utilizan para trabajar cantidades sumamente elevadas, reduciéndolas a escalas más pequeñas; donde se pueden trabajar cómodamente, utilizando lo que se conoce como "papel logarítmico". En Química, por ejemplo, se utiliza los logaritmos para calcular el pH de las soluciones químicas.

# TEORÍA DE LOGARITMOS EN $\mathbb{R}$

## TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL LOGARITMO

Para todo par de números reales  $a$  y  $x$ , tales que  $a > 0$ ;  $a \neq 1$  y  $x > 0$ , existe un único número real  $y$  que cumple  $a^y = x$ .

**Ejemplo:** Si  $a = 3$  y  $x = 81 \Rightarrow \exists! y = 4 / 3^4 = 81$

## DEFINICIÓN DEL LOGARITMO

Dado un número real  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , el logaritmo de un número  $x > 0$  en la base " $a$ ", es el exponente " $y$ " al que debe elevarse " $a$ ", de manera que se cumpla que  $a^y = x$ .

### Notación:

$$y = \log_a x$$

Se lee: " $y$ " es el logaritmo de  $x$  en base " $a$ ".

De la definición se tiene:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x; x > 0; a > 0; a \neq 1$$

### Ejemplos:

$$1. \log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

$$2. \log_3 81 = 4 \text{ porque } 3^4 = 81$$

$$3. \log_{\frac{1}{3}} 243 = x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$$

$$4. \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x + 2) = -2 \rightarrow x^2 - x + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \wedge x = -1$$



$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; \forall a > 0; a \neq 1$$

$$1. \log_{100} 1 = 0$$

$$2. \log_{\pi} \pi = 1$$

$$3. \log_{102} 102 = 1$$

$$4. \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$$

$$5. \log_{(-2)} 1 = \text{no existen en } \mathbb{R}, \text{ ya que } a = -2 < 0$$

$$6. \log_{(-4)} (-4) = \text{no existen en } \mathbb{R}, \text{ ya que } a = -4 < 0$$

## IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

Utilizando la definición

$$\text{De } y = \log_a x \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Tenemos que } a^y = x \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos la identidad fundamental:

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0, \wedge a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

### Ejemplos:

$$1. 3^{\log_3 5} = 5$$

$$2. (x^2 + 2)^{\log_{(x^2+2)} 4} = 4; x \in \mathbb{R}$$

$$3. (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\log_{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} 3} = \text{no existe en } \mathbb{R}, \text{ puesto que la base } (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \text{ es negativa.}$$

## PROPIEDADES SOBRE LOGARITMOS

Si los logaritmos existen en  $\mathbb{R}$ , entonces se cumplen los siguientes teoremas:

1. **TEOREMA**

Si  $x > 0; y > 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

**Demostración:**

Demostraremos esta propiedad de dos formas.

a. Por definición:

Si  $\log_a x = m$  entonces  $a^m = x$

$\log_a y = n$  entonces  $a^n = y$

Multiplicando ambas igualdades obtenemos

$$a^{m+n} = xy$$

Por definición de logaritmos tenemos que

$$m + n = \log_a(xy)$$

$$\therefore \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

b. Por la identidad fundamental

$$x = a^{\log_a x}$$

$$y = a^{\log_a y}$$

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\therefore \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

**En general:** Si  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge \{x; y; \dots; w\} \subset \mathbb{R}^+$

$$\log_a(xyz \dots w) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots + \log_a w$$

**Ejemplos:**

1.  $\log_2 15 = \log_2(3)(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

2.  $\log_4(3x) = \log_4 3 + \log_4 x; x > 0$

3.  $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3(x+2)(x-2) =$   
 $= \log_3(x^2 - 4); x > 2$

4. Simplificar:

$$\log_5\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_5\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log_5\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_5\left(1 + \frac{1}{49}\right)$$

**Resolución:**

Aplicando la propiedad del producto

$$= \log_5 \left[ \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right) \dots \left(\frac{49}{48}\right) \left(\frac{50}{49}\right) \right]$$

$$= \log_5 \left( \frac{50}{2} \right) = \log_5 25 = 2$$

2. **TEOREMA**

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x; \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{R} \\ m \in \mathbb{R}; x > 0 \end{matrix}$$

**Demostración:**

Si  $\log_{a^m} x^n = y$

Entonces  $x^n = a^{my}; x = a^{\frac{my}{n}}$

Por definición:  $\log_a x = \frac{m}{n} y$

$$\log_a x = \frac{m}{n} \log_{a^m} x^n$$

$$\therefore \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

Consecuencias:

$$\log_a x^n = n \log_a x; n \in \mathbb{R} \rightarrow \log_a a^n = n$$

$$\log_a x = \log_{a^n} x^n; n \in \mathbb{R}$$

$$\log_a x = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{x}; \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{matrix}$$

1.  $\log_2 2^{100} = 100$

2.  $\log_3 \sqrt[5]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

3.  $\log_6 \sqrt[5]{6^{50}} = \frac{50}{5} \log_6 6 = 10$



$$4. \log_{32} 1024 = \log_{\sqrt[5]{32}} \sqrt[5]{1024} = \log_2 4 = 2$$

$$5. \log_{\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{\sqrt[3]{2}} 4^3 = \log_2 64 = 6$$



$$\log_a^n x = (\log_a x)^n; n \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto  $\log_a^n x \neq n \log_a x$

$$6. \log_3^2 x = (\log_3 x)(\log_3 x) \neq 2 \log_3 x$$

$$7. \log_3^2 81 = (\log_3 81)^2 = 4^2 = 16$$

3. **TEOREMA**

Si  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge \{x; y\} \subset \mathbb{R}^+$

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

#### Demostración:

Aplicando las propiedades demostradas anteriormente:

$$\begin{aligned} \log_a \left( \frac{x}{y} \right) &= \log_a (xy^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} \\ &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

$$1. \log_2 \left( \frac{5}{9} \right) = \log_2 5 - \log_2 9$$

$$2. \log_3 7 = \log_3 \left( \frac{21}{3} \right) = \log_3 21 - 1$$

3. Calcular:

$$\log_2 \left( \frac{37}{23} \right) + \log_2 \left( \frac{3}{74} \right) - \log_2 \left( \frac{3}{92} \right)$$

#### Resolución:

$$= \log_2 \left( \frac{\cancel{37}}{23} \right) \left( \frac{3}{\cancel{74}} \right) - \log_2 \left( \frac{3}{92} \right)$$

$$= \log_2 \left( \frac{3}{\frac{46}{3}} \right) = \log_2 2 = 1$$

#### 4. Cambio de base

##### TEOREMA

Si  $y; a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge x > 0$

$$\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

#### Demostración:

Por la identidad fundamental.

$$1. x^{\log_x y} = y$$

$$\log_a x^{\log_x y} = \log_a y$$

$$\log_x y \log_a x = \log_a y$$

$$\therefore \log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

$$2. \log_5 3 = \frac{\log_6 3}{\log_6 5} = \frac{\log_\pi 3}{\log_\pi 5}$$

#### Consecuencias:

$$a. \log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y}$$

Entonces:  $\log_y x = \frac{1}{\log_x y} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

o también  $\log_y x \cdot \log_x y = 1$

#### b. Regla de la cadena

$$\log_x @ \cdot \log_@ y = \log_x y$$

En general:

$$\log_a x \log_x y \log_y z \dots \log_w A = \log_a A$$

**Ejemplos:**

- $\log_5 \textcircled{3} \log_{\textcircled{3}} 7 = \log_5 7$
- $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \dots \log_{31} 32$   
 $= \log_2 32 = 5$
- $\log_3 125 \cdot \log_6 81 \cdot \log_5 36 =$   
 $= (\log_2 5^3)(\log_6 3^4)(\log_5 6^2)$   
 $= (3)(4)(2) \underbrace{\log_3 \textcircled{5} \log_6 3 \log_5 \textcircled{6}}_{\text{UNO}} = 24$

**c. Regla del intercambio**

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x} ; x, y > 0, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

**Demostración:**

$$x^{\log_a y} = x^{\log_a x \log_x y} = (x^{\log_x y})^{\log_a x} = y^{\log_a x}$$

**Ejemplos:**

- $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7} = \frac{\log_3 5}{\log_3 7} = \frac{\log_\pi 5}{\log_\pi 7}$
- $\log_4 6 = \frac{1}{\log_6 4}$
- $3^{\log_5 4} = 4^{\log_5 3}$
- $\frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_3 40 + 2} + \frac{1}{\log_5 72 + 1}$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\log_2 45 + \log_2 8} + \frac{2}{\log_3 40 + \log_3 9} + \frac{1}{\log_5 72 + \log_5 5} \\ &= \frac{3}{\log_2 360} + \frac{2}{\log_3 360} + \frac{1}{\log_5 360} \\ &= 3 \log_{360} 2 + 2 \log_{360} 3 + \log_{360} 5 \\ &= \log_{360} 2^3 + \log_{360} 3^2 + \log_{360} 5 = \\ &= \log_{360} (2^3)(3^2)(5) = \log_{360} 360 = 1 \end{aligned}$$

**SISTEMA DE LOGARITMOS**

De la definición del logaritmo se deduce que cualquier número positivo, diferente de la unidad, puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos; por lo tanto, el número de sistema de logaritmos es ilimitado. Los más importantes son:

**Sistema de logaritmos vulgares, decimal o de Briggs**

Este sistema fue implementado por el matemático inglés Henry Briggs y tiene como base a 10.

**Notación:**

$$\log N = \log_{10} N$$

↑

Se lee: "logaritmo decimal de N", no se escribe la base, se sobreentiende que es 10.

- $\log 100 = 2$
- $\log 1000000 = 6$

**Sistema de logaritmos naturales, neperiano o hiperbólico**

El matemático escocés John Neper fue quien implementó este sistema, cuya base es el número irracional  $e \approx 2,7182\dots$ .

**Notación:**

$$\text{Ln } N = \log_e N$$

↑

Se lee: "logaritmo natural de N".

**Ejemplos:**

- $\text{Lne}^5 = 5$
- $e^{\text{Ln} 7} = 7$



La función  $f(x) = e^x$  se puede escribir mediante la serie de Maclaurin, así:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{Si } x=1 : e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \approx 2,7182\dots$$

## LOGARITMOS DECIMALES

En las épocas en las cuales no se conocían las calculadoras, el uso de los logaritmos decimales era muy útil para realizar operaciones aritméticas engorrosas.

A continuación, haremos una explicación detallada de los componentes de un logaritmo decimal y cómo se calcula cada uno de ellos.

En las matemáticas se acostumbra representar todo número positivo “x” bajo la forma.

$$x = a \times 10^n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad 1 \leq a < 10$$

Tomando logaritmo tenemos:

$$\log x = \log(a \times 10^n)$$

Por lo tanto:

$$\log x = \log a + n, \quad 0 \leq \log a < 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Denominaremos:

$\log a$  = mantisa del logaritmo de x

$n$  = característica del logaritmo de x

Es decir:  $\log x = \text{característica} + \text{mantisa}$

La mantisa es siempre un número comprendido entre 0 y 1, pudiendo ser igual a 0, pero no igual a 1. La mantisa nunca es negativa.

La característica es un número entero, es decir, puede ser positivo, negativo o cero.

### CÁLCULO DE LA CARACTERÍSTICA

La característica depende únicamente de la posición de la coma decimal.

Determinemos la característica de los logaritmos de los siguientes números positivos.

Número	Característica
$1000 = 10^3$	$\rightarrow 3$
$683 = 6,83 \times 10^2$	$\rightarrow 2$
$0,456 = 4,56 \times 10^{-1}$	$\rightarrow -1$
$0,0000362 = 3,62 \times 10^{-5}$	$\rightarrow -5$

Es decir, debemos expresar el número “x” así:

$$x = a \times 10^n$$

Se observa que la coma decimal debe ubicarse inmediatamente después del primer número diferente de cero.

En general:

Número

Característica

$$0,\underbrace{000\dots 0}_{r \text{ cifras}} mnp\dots z = m,np\dots z \times 10^{-r} \text{ con } m \neq 0 \rightarrow -r$$

$$0,\underbrace{abc\dots m}_{r \text{ cifras}},np\dots z = a,bc\dots mnp\dots z \times 10^r \text{ con } a \neq 0 \rightarrow r$$

**Ejemplo:**

$$0,\underbrace{0000000}_{7 \text{ cifras}} 378 = 3,78 \times 10^{-7} \rightarrow -7$$

$$2,\underbrace{37891204}_{7 \text{ cifras}},2036 = 2,378912042036 \times 10^8 \rightarrow 8$$

### CÁLCULO DE LA MANTISA

Hemos mostrado cómo determinar la característica del logaritmo de un número. Sin embargo, encontrar las mantisas no es tan sencillo. Los métodos desarrollados en matemáticas superiores permiten el cálculo de una mantisa hasta el número deseado de cifras decimales. Las mantisas correspondientes a muchos números han sido calculadas y arregladas en forma de tabla (tabla de logaritmos o tabla de mantisas). Puesto que la mayoría de las mantisas son decimales ilimitados, se dan sus valores sólo aproximadamente.

Dado  $\log 5,82 = 0,7649$ , escribir el logaritmo de 58,2 y 58200.

Las mantisas de los logaritmos de todos estos números son iguales a la mantisa dada, la diferencia está en la característica.

$$\log 58,2 = \log(5,82 \times 10) = 1 + \log 5,82 = 1,7649$$

$$\log 58200 = \log(5,82 \times 10^4) = 4 + \log 5,82 = 4,7649$$

La característica puede combinarse con la mantisa para producir una sola cantidad.

Por ejemplo:

$\log(0,0582) = \log(5,82 \times 10^{-2}) = -2 + 0,7649 = -1,2351$   
sin embargo, es preferible expresar un logaritmo con las partes decimales positivas, por ello escribimos

$$\log 0,0582 = \bar{2},7649$$



## MANTISAS DE LOS LOGARITMOS DECIMALES DE LOS NÚMEROS DE 1,00 AL 9,99

Y	0	1	2	3	4		5	6	7	8	9
1,0	0000	0043	0086	0128	0170		0212	0253	0294	0334	0374
1,1	0414	0453	0492	0531	0569		0606	0645	0682	0719	0755
1,2	0792	0828	0864	0899	0934		0969	1004	1039	1072	1106
1,3	1139	1173	1206	1239	1271		1303	1335	1367	1399	1430
1,4	1461	1492	1523	1553	1584		1614	1644	1673	1703	1732
1,5	1761	1790	1818	1847	1875		1903	1931	1959	1987	2014
1,6	2041	2068	2095	2122	2148		2175	2201	2227	2253	2279
1,7	2304	2330	2355	2380	2405		2430	2455	2480	2504	2529
1,8	2553	2577	2601	2625	2648		2672	2695	2718	2742	2765
1,9	2788	2810	2833	2856	2878		2900	2923	2945	2967	2989
2,0	3010	3032	3054	3075	3096		3118	3139	3160	3181	3201
2,1	3222	3243	3263	3284	3304		3324	3345	3365	3385	3404
2,2	3224	3444	3464	3483	3502		3522	3541	3560	3579	3598
2,3	3617	3636	3655	3674	3692		3711	3829	3747	3766	3784
2,4	3802	3820	3838	3856	3874		3892	3909	3927	3945	3962
2,5	3979	3997	4014	4031	4048		4065	4082	4099	4116	4133
2,6	4150	4166	4183	4200	4216		4232	4249	4265	4281	4298
2,7	4314	4330	4346	4362	4378		4393	4409	4425	4440	4456
2,8	4472	4487	4502	4518	4533		4548	4564	4579	4594	4609
2,9	4624	4639	4654	4669	4683		4698	4713	4728	4742	4757
3,0	4771	4786	4800	4814	4829		4843	4857	4871	4886	4900
3,1	4914	4928	4942	4955	4969		4983	4997	5011	5024	5038
3,2	5051	5065	5079	5092	5105		5119	5132	5145	5159	5172
3,3	5185	5198	5211	5224	5237		5250	5263	5276	5289	5302
3,4	5135	5328	5340	5353	5366		5378	5391	5403	5416	5428
3,5	5441	5443	5465	5478	5490		5502	5514	5527	5539	5551
3,6	5563	5575	5587	5599	5611		5623	5635	5647	5658	5670
3,7	5682	5694	5705	5717	5729		5740	5752	5763	5775	5786
3,8	5798	5809	5821	5832	5843		5855	5866	5877	5888	5899
3,9	5911	5922	5933	5944	5955		5966	5977	5988	5999	6010
4,0	6021	6031	6042	6053	6064		6075	6085	6096	6107	6117
4,1	6128	6138	6149	6160	6170		6180	6191	6201	6212	6222
4,2	6232	6243	6253	6263	6274		6281	6294	6301	6314	6325
4,3	6335	6345	6355	6365	6375		6385	6395	6405	6415	6425
4,4	6435	6444	6454	6464	6474		6484	6493	6503	6513	6522
4,5	6532	6542	6551	6561	6571		6580	6590	6599	6609	6618
4,6	6628	6637	6646	6656	6665		6675	6684	6693	6702	6712
4,7	6721	6730	6739	6749	6758		6767	6776	6785	6794	6803
4,8	6812	6821	6830	6839	6848		6857	6866	6875	6884	6893
4,9	6902	6911	6920	6928	6937		6946	6955	6964	6972	6981
5,0	6990	6998	7007	7016	7024		7033	7042	7050	7059	7067
5,1	7076	7084	7093	7101	7110		7118	7126	7135	7143	7152
5,2	7160	7168	7177	7185	7193		7202	7210	7218	7226	7235
5,3	7243	7251	7259	7267	7275		7284	7292	7300	7308	7316
5,4	7324	7332	7340	7348	7356		7364	7372	7380	7388	7396

(continúa)

(continuación)

Y	0	1	2	3	4		5	6	7	8	9
5,5	7404	7412	7419	7427	7435		7443	7451	7459	7466	7474
5,6	7482	7490	7497	7505	7513		7520	7528	7536	7543	7551
5,7	7559	7566	7574	7582	7589		7507	7604	7612	7619	7627
5,8	7634	7642	7649	7657	7664		7672	7679	7686	7694	7701
5,9	7709	7716	7723	7731	7738		7745	7752	7760	7767	7774
6,0	7782	7798	7796	7803	7810		7818	7825	7832	7839	7846
6,1	7853	7860	7868	7875	7882		7889	7896	7903	7910	7917
6,2	7924	7931	7938	7945	7952		7959	7966	7973	7980	7987
6,3	7993	8000	8007	8014	8021		8028	8035	8041	8048	8055
6,4	8062	8069	8075	8082	8089		8096	8102	8100	8116	8122
6,5	8129	8136	8142	8149	8156		8162	8169	8176	8182	8189
6,6	8195	8202	8209	8215	8222		8228	8235	8241	8248	8254
6,7	8261	8267	8274	8280	8287		8293	8299	8306	8312	8319
6,8	8325	8331	8338	8344	8351		8357	8363	7370	8376	8382
6,9	8388	8395	8404	8407	8414		8420	8426	8432	8439	8445
7,0	8451	8457	8463	8470	8476		8482	8488	8494	8500	8506
7,1	8513	8519	8525	8531	8537		8543	8549	8555	8561	8567
7,2	8573	8579	8585	8591	8597		8603	8609	8615	8621	8627
7,3	8633	8639	8645	8651	8657		8663	8669	8675	8681	8686
7,4	8692	8698	8704	8710	8716		8722	8727	8733	8739	8745
7,5	8751	8756	8762	8768	8774		8779	8785	8791	8797	8802
7,6	8808	8814	8820	8825	8831		8837	8842	8848	8854	8859
7,7	8865	8871	8876	8882	8887		8893	8899	8904	8910	8915
7,8	8921	8927	8932	8938	8953		8949	8954	8960	8965	8971
7,9	8976	8982	8987	8993	8998		9004	9009	9015	9020	9025
8,0	9031	9036	9042	9047	9053		9058	9063	9069	9074	9079
8,1	9085	9090	9096	9101	9106		9112	9117	9122	9128	9133
8,2	9138	9143	9149	9154	9159		9165	9170	9175	9180	9186
8,3	9191	9196	9201	9206	9212		9217	9222	9227	9232	9238
8,4	9243	9248	9253	9258	9263		9269	9274	9279	9284	9289
8,5	9294	9299	9304	9309	9315		9320	9325	9330	9335	9340
8,6	9345	9350	9355	9360	9365		9370	9375	9380	9385	9390
8,7	9395	9400	9405	9410	9415		9420	9425	9430	9435	9440
8,8	9445	9450	9455	9460	9465		9469	9474	9479	9484	9489
8,9	9494	9499	9504	9509	9513		9518	9523	9528	9533	9538
9,0	9542	9547	9552	9557	9562		9566	9571	9576	9581	9586
9,1	9590	9595	9600	9605	9609		9614	9619	9624	9628	9633
9,2	9638	9643	9647	9652	9657		9661	9666	9671	9675	9680
9,3	9685	9689	9694	9699	9703		9708	9713	9719	9722	9727
9,4	9731	9736	9741	9745	9750		9754	9759	9763	9768	9773
9,5	9777	9782	9786	9791	9795		9800	9805	9809	9814	9818
9,6	9823	9827	9832	9836	9841		9845	9850	9854	9859	9863
9,7	9868	9872	9877	9881	9886		9890	9894	9899	9903	9908
9,8	9912	9917	9921	9926	9930		9935	9939	9943	9948	9952
9,9	9956	9961	9965	9969	9974		9978	9983	9987	9991	9996



**INTERPOLACIÓN LINEAL**

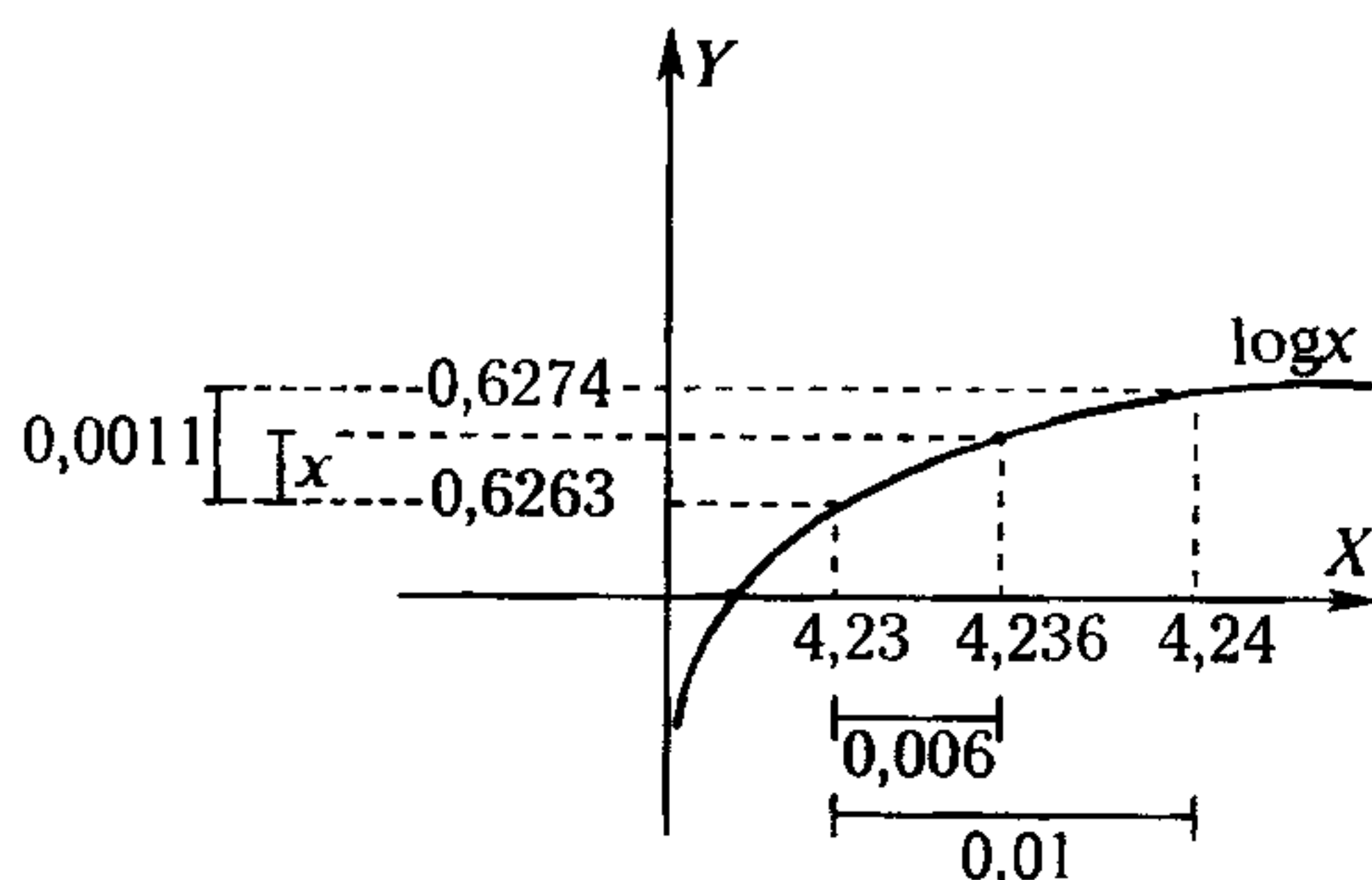
La determinación del logaritmo de un número de cuatro o más dígitos no es posible obtenerla en la tabla anterior. Sin embargo, estos casos pueden manejarse por medio del uso de un procedimiento llamado interpolación, el cual nos permitirá obtener resultados satisfactoriamente aproximados.

**Ejemplo:**

Encontrar:  $\log 4236$

Sabemos que  $\log(4,236 \times 10^3) = 3 + \log 4,236$

Pero  $\log 4,236$  no se encuentra en la tabla, para concentrarlo debemos utilizar la interpolación lineal que consiste en aplicar proporciones.



Del gráfico:

$$\frac{x}{0,006} = \frac{0,0011}{0,01}$$

$$x = 0,00066$$

$$\log 4,236 = 0,6263 + 0,00066 = 0,62696$$

$$\therefore \log 4236 = 3 + 0,62696 = 3,62696$$

**LOGARITMOS USADOS EN LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS**

A continuación presentamos algunos ejemplos, en los cuales ilustraremos como se utiliza la tabla de los logaritmos para realizar operaciones de multiplicación, división, radicación y potenciación.

**Multiplicación y división**

Calcular:

$$N = \frac{(32,41)(81,93)}{(1,854)(0,7949)}$$

**Resolución:**

Sabemos que:

$$\log N = \log 32,41 + \log 81,93 - \log 1,854 - \log 0,7949$$

Utilizando nuestra tabla de logaritmos y el método de interpolación lineal obtenemos.

$$\log 32,41 = 1,5106$$

$$\log 81,93 = 1,9135$$

$$\log 1,854 = 0,2681$$

$$\log 0,7949 = 0,9003 - 1$$

$$\text{Luego } \log N = 3,2557$$

Utilizando nuevamente la tabla para calcular el antilogaritmo

$$N = 1802$$

**Radicación**

$$\text{Evaluar } M = \sqrt[3]{3,25}$$

**Resolución:**

Tomando logaritmo decimal

$$\log M = \frac{1}{3} \log 3,25$$

$$= \frac{1}{3} (0,5119) = 0,1706\bar{3}$$

**Potenciación**

Calcular la potencia  $x = (1,24)^{50}$

**Resolución:**

Tenemos que:

$$\log x = 50 \log(1,24)$$

$$= 50(0,0934) = 4,67$$

**Propiedad**

Sea  $n$  un número positivo mayor que uno ( $N > 1$ ); el número de cifras en su parte entera viene dado por la característica de su logaritmo aumentado en la unidad.

# de cifras enteras de N	=	característica de log N	+ 1
-----------------------------	---	----------------------------	-----



**Ejemplo:**

Determine el número de cifras de  $N = 2^{20} \cdot 3^{30}$

**Resolución:**

Tomando logaritmo decimal

$$\log N = 20\log 2 + 30\log 3$$

Utilizando la tabla de logaritmos

$$\log N = 20(0,3010) + 30(0,4771) = 6,02 + 14,313$$

$$\log N = 20,333$$

característica = 20

$$\therefore \text{Número de cifras de } N = 20 + 1 = 21$$

**LOGARITMOS NEPERIANOS**

A mediados del siglo diecisiete (1647), el padre jesuita belga Gregory Saint Vincent y su amigo A.A. de Sarasa reconocieron que el área

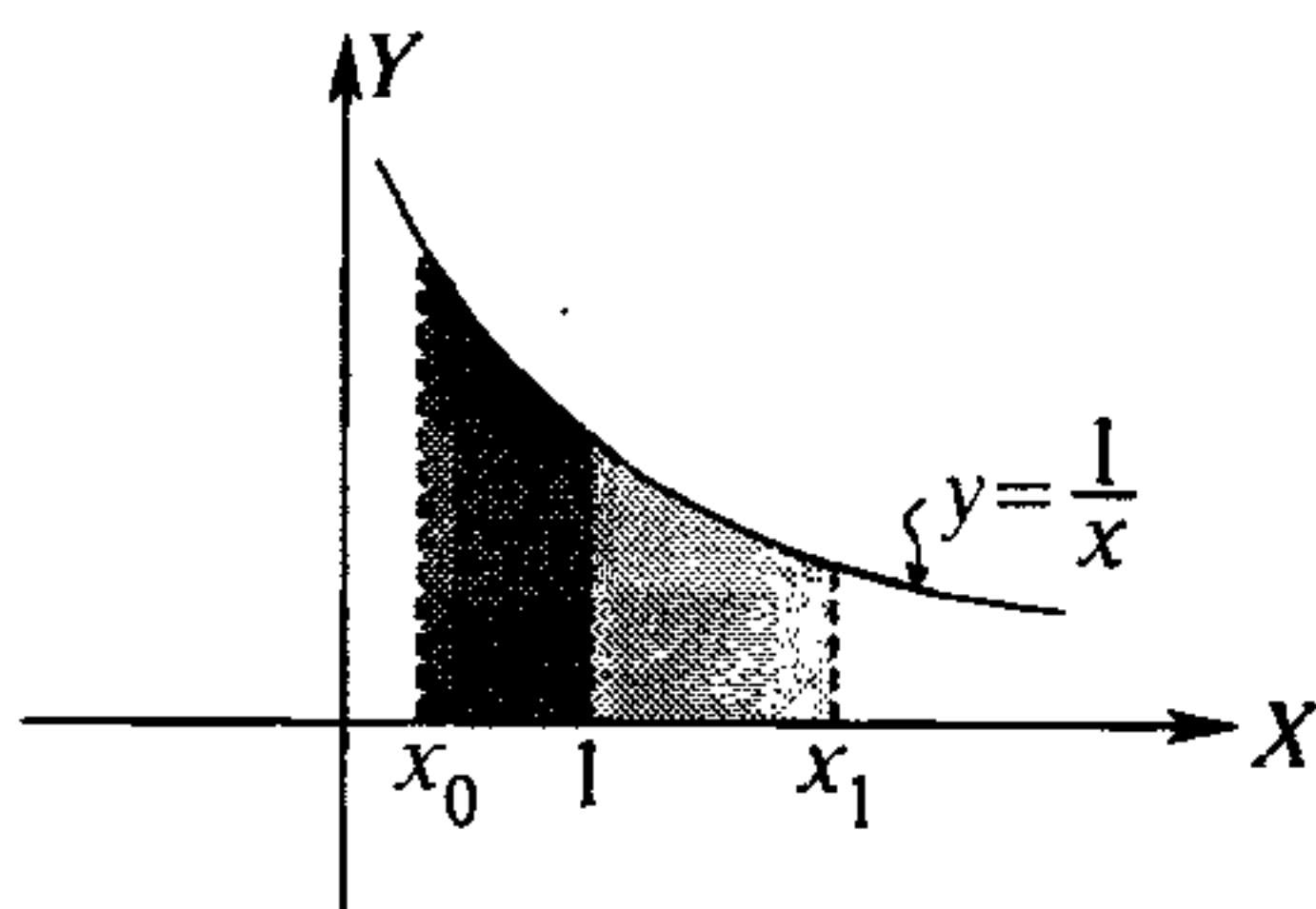
bajo la hipérbola  $y = \frac{1}{x}$  se comporta como un logaritmo. En 1660, Newton y Leibniz lo ratificaron.

**TEOREMA****Caracterización de las funciones logarítmicas**

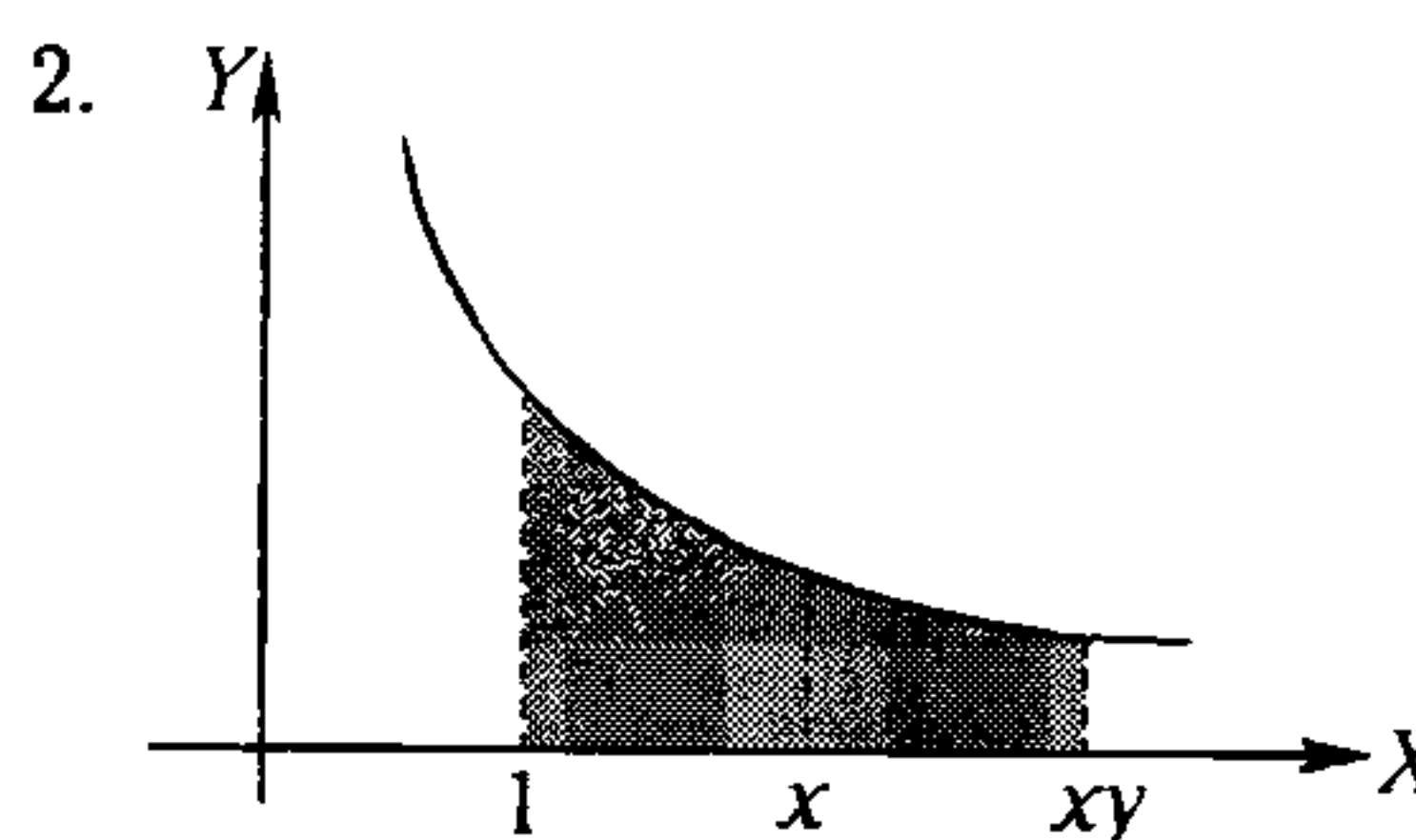
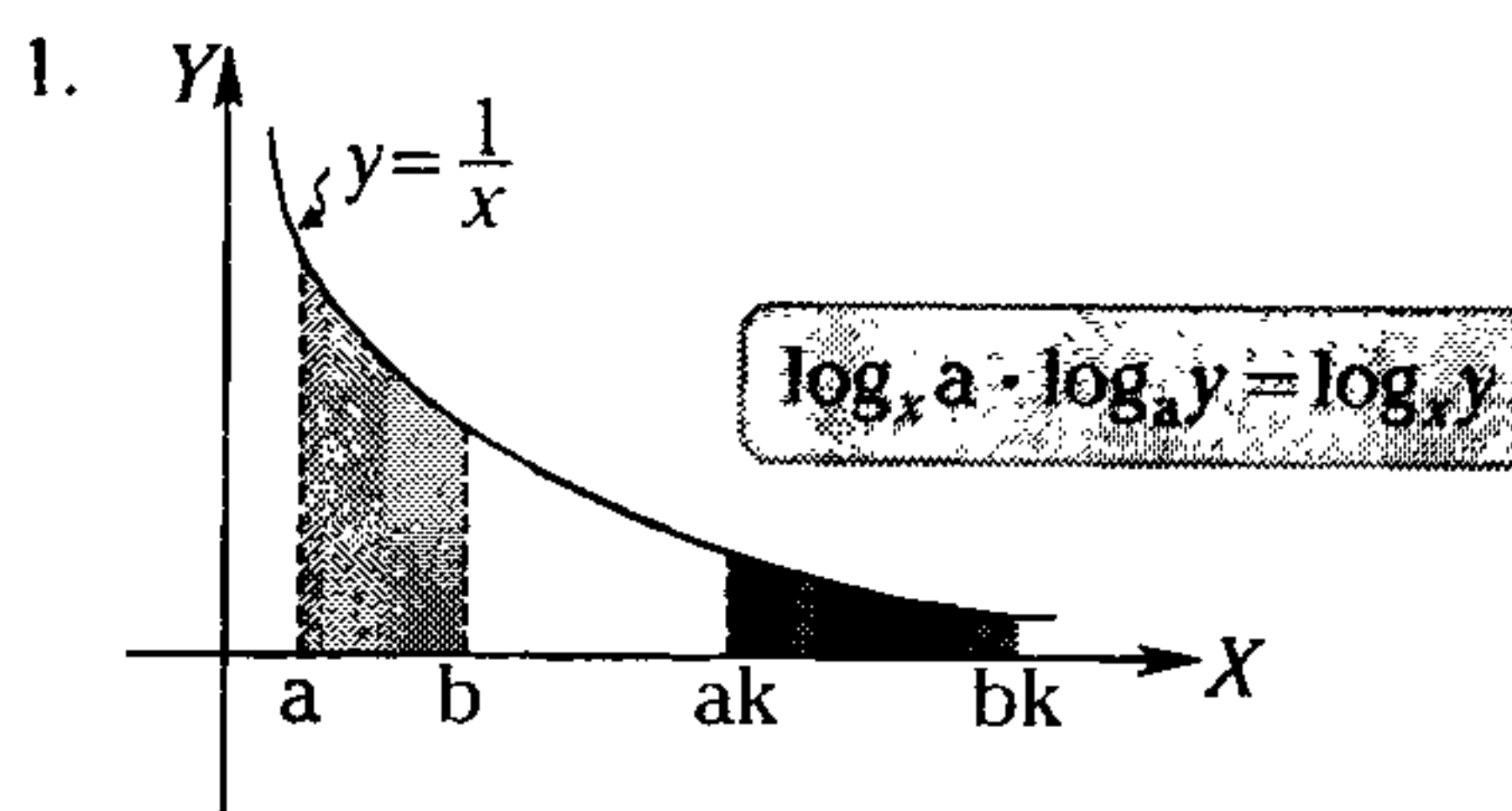
Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente), tal que  $f(xy) = f(x) + f(y)$  para cualquier  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Entonces existe  $a > 0 \wedge a \neq 1$  tal que  $f(x) = \log_a x$  para todo  $x$ .

Este teorema quiere decir que, entre las funciones monótonas inyectivas de  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , solamente las funciones logarítmicas tienen la propiedad de transformar productos en sumandos.

Definamos una función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = A_1^x$  (área de 1 a  $x$ ).



El área bajo la curva cumple las siguientes propiedades.



Se observa que:  $A_1^{xy} = A_1^x + A_x^{xy}$ . Al utilizar la anterior propiedad tenemos:

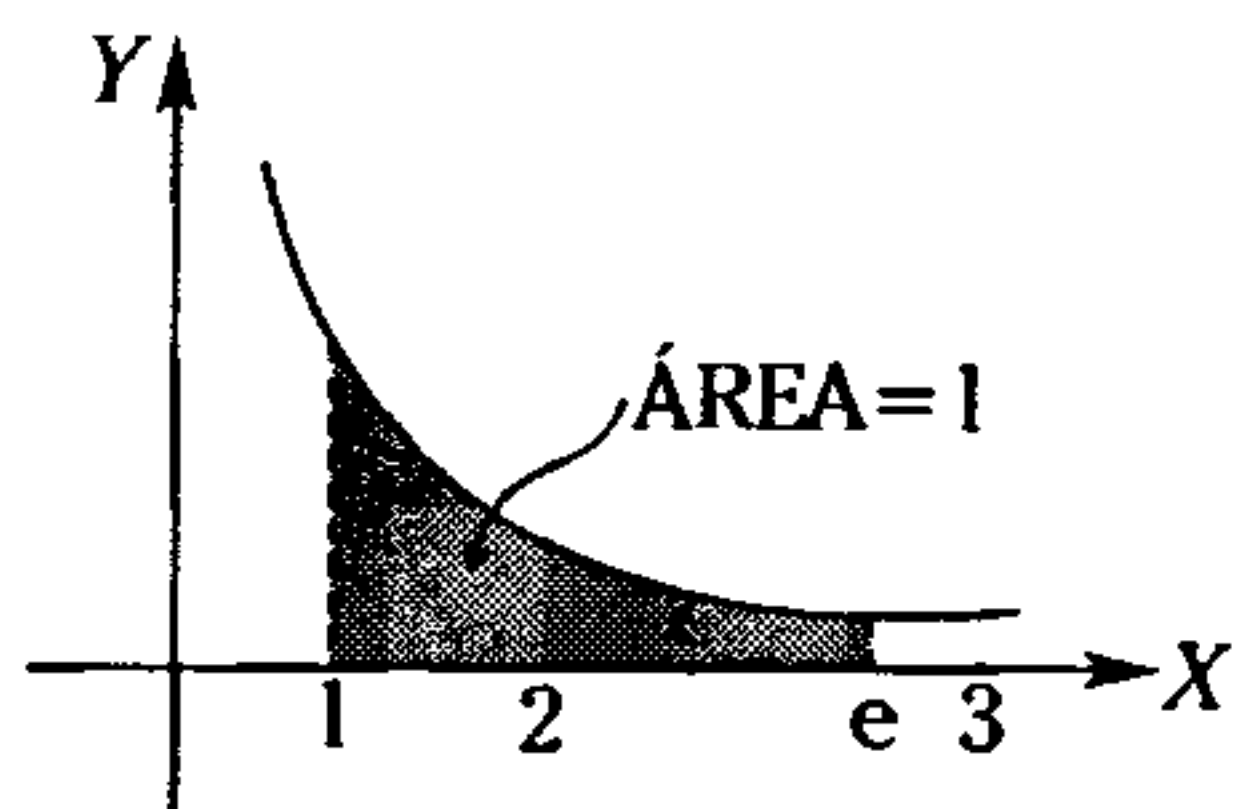
$$A_1^{xy} = A_1^x + A_x^{xy} \text{ como } f(x) = A_1^x, \text{ entonces}$$

$f(xy) = A_1^{xy} = f(x) + f(y)$  utilizando el teorema de caracterización de las funciones logarítmicas, existe un número real positivo, que llamaremos  $e \approx 2,718281828459$ , tal que:

$$f(x) = \log_e x ; x \in \mathbb{R}^+$$

Notación:  $f(x) = \log_e x = \ln x$

Hemos entonces denotado  $\text{Ln}x$  en vez de  $\log_e x$  y, llamaremos al número  $\text{Ln}x$  logaritmo natural de  $x$ . Esto quiere decir que  $\text{Ln}x$  es el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$  desde 1 hasta  $x$ .

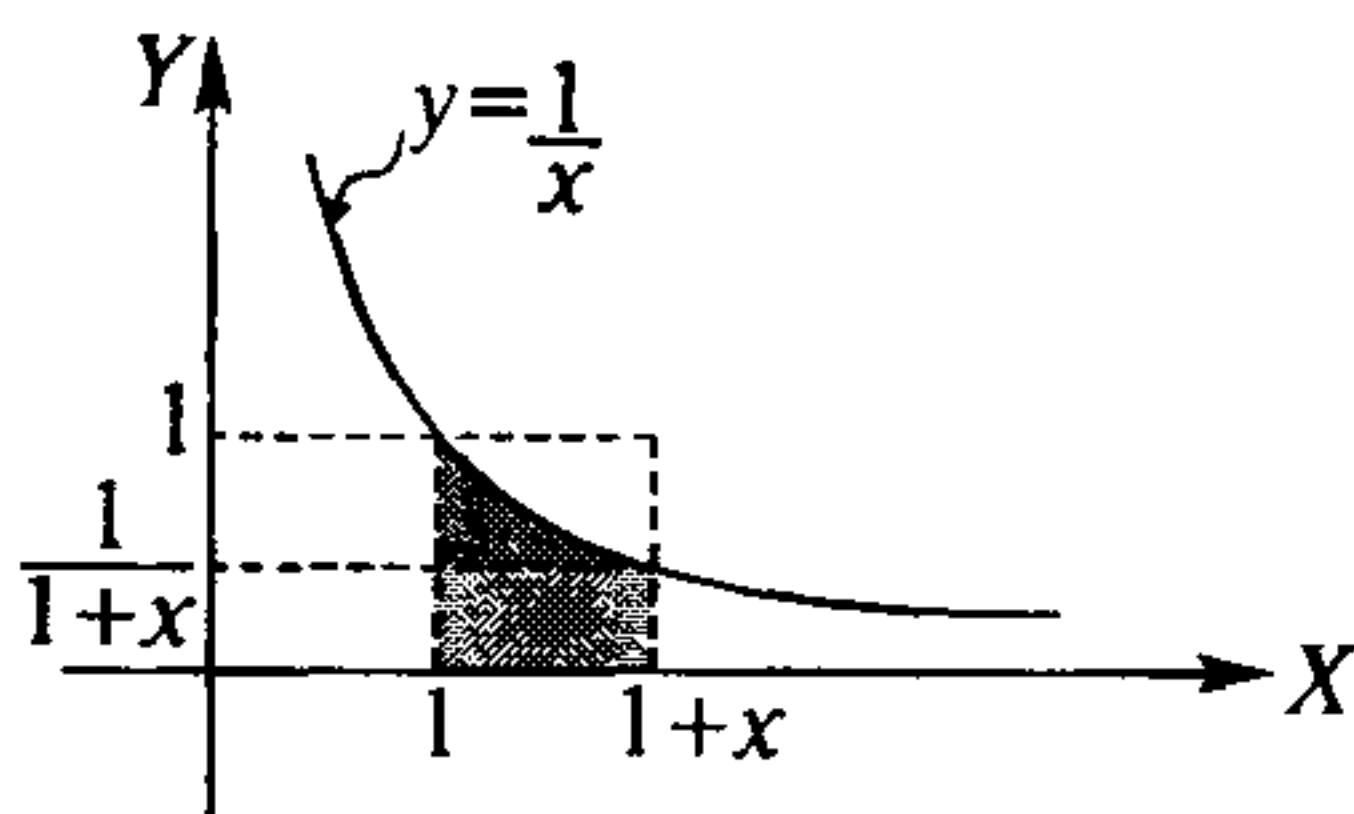


**Ejemplo:**

Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

**Resolución:**

Utilicemos la curva  $y = \frac{1}{x}$



De esta gráfica podemos establecer la siguiente relación:

área del rectángulo menor < área bajo la curva < área del rectángulo mayor

Entonces:

$$\frac{x}{1+x} < \text{Ln}(1+x) < x ; x > 0$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\text{Ln}(1+x)}{x} < 1$$

$$\frac{1}{1+x} < \text{Ln}(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1$$

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

Haciendo  $x = \frac{1}{n}$ ;  $e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$

Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = e$

Al aplicar el teorema del Sandwich concluimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

## ANTILOGARITMO

Se define como la operación inversa a la logaritmación.

$$\text{antilog}_b x = b^x ; b > 0 ; b \neq 1 ; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{antilog}_2 7 = 2^7 = 128$$

## Propiedades

Sea  $x > 0$  ;  $b > 0$  y  $b \neq 1$

$$\text{antilog}_b (\log_b x) = x$$

$$\log_b (\text{antilog}_b x) = x$$

$$1. \log_6 \text{antilog}_6 8 = \log_6 6^8 = 8$$

$$2. \text{antilog}_3 \log_3 92 = 3^{\log_3 92} = 92$$

## COLOGARITMO

Se define como el logaritmo en base "b" del inverso multiplicativo de un número "x".

$$\text{colog}_b x = \log_b \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x ; b > 0, b \neq 1 ; x > 0$$

$$1. \text{colog}_6 216 = -\log_6 216 = -3$$

$$2. \text{colog}_3 \left(\frac{1}{27}\right) = \log_3 27 = 3$$

## FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Estas funciones se denominan trascendentes y se caracterizan por ser una inversa de la otra.

### FUNCIÓN EXPONENCIAL O FUNCIÓN ANTILOGARÍTMICA

En capítulos anteriores hemos atribuido el significado de  $a^x$  ( $a > 0$ ), siendo  $x$  un número racional.

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ahora necesitamos tener un significado para  $a^x$  cuando  $x$  es cualquier número real ( $x \in \mathbb{R}$ ), es decir, deseamos tener una definición para  $a^x$  cuando  $x$  es racional o irracional, para ello haremos uso de los siguientes teoremas:

#### TEOREMA

Sean  $m$  y  $n$  números reales con  $m < n$

$$\text{Si } a > 1 \leftrightarrow a^m < a^n$$

$$\text{Si } 0 < a < 1 \leftrightarrow a^m > a^n$$

1. Si  $a = 2 \rightarrow 2^3 < 2^4$

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

2. Si  $a = \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,25}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$$

#### TEOREMA

Si  $a$  es un número positivo entonces  $a^x$  con  $x \in \mathbb{R}$  es siempre positivo.

$$a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

1.  $4^3 = 64 > 0$

2.  $4^{-3} = \frac{1}{64} > 0$

### DEFINICIÓN

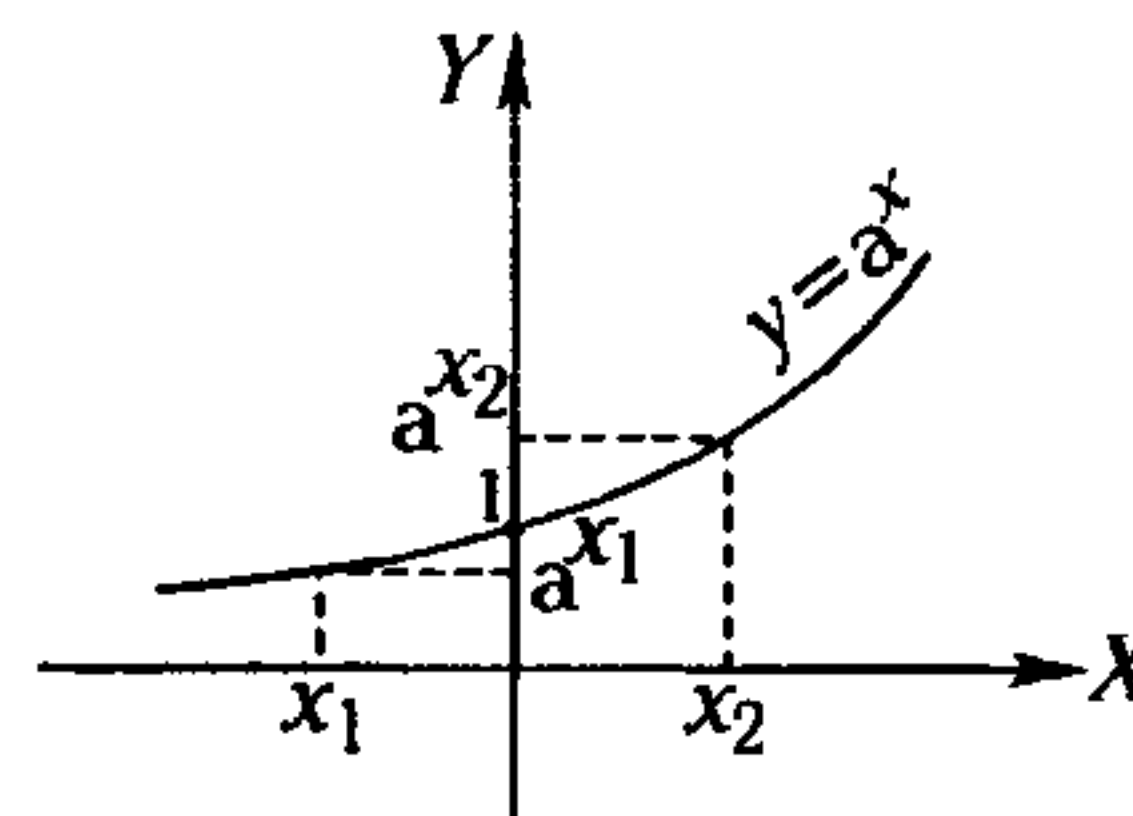
Si  $a$  es un número real positivo diferente de uno ( $a \in \mathbb{R}^+ ; a \neq 1$ ), entonces la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = a^x$ ;  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ ,  $\text{ran}(f) = (0; +\infty)$  o también por:

$$E_a(x) = \{(x; a^x) / x \in \mathbb{R}\}$$

Es la función exponencial o antilogarítmica de base " $a$ ".

### Gráfica:

Cuando:  $a > 1$



Se puede observar lo siguiente:

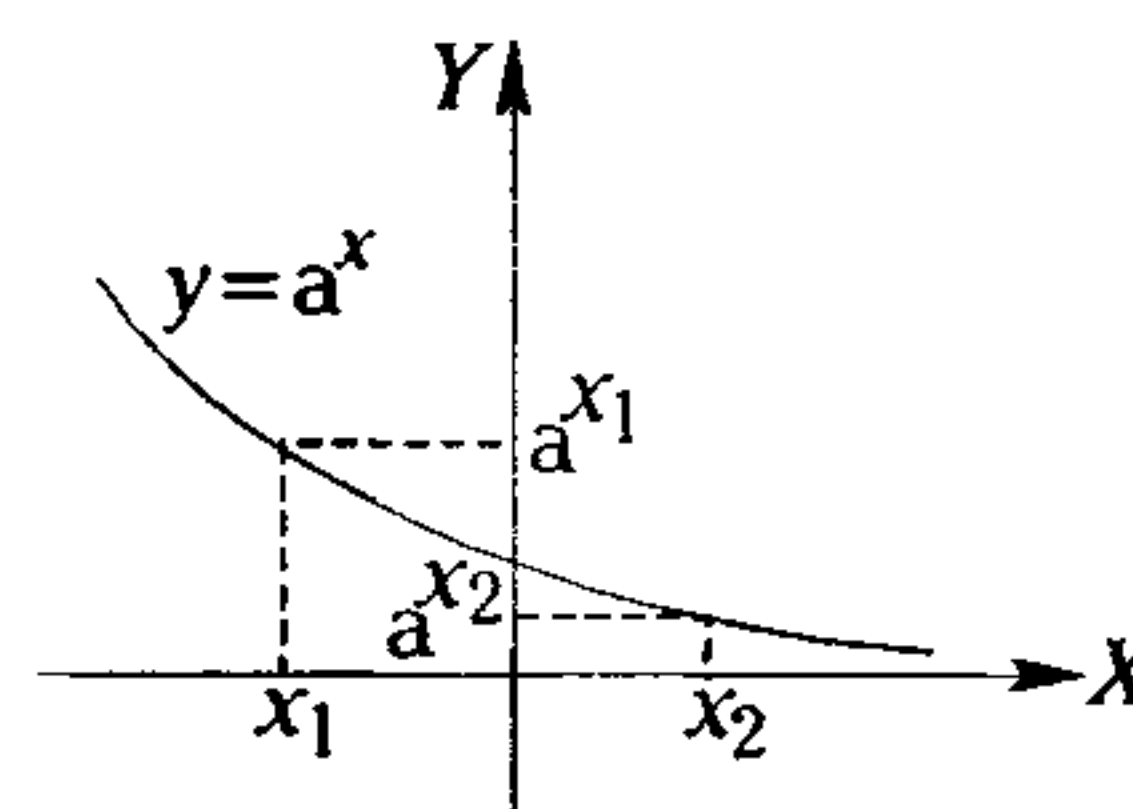
1. Es una función creciente.

$$(x_2 > x_1 \leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1})$$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

Cuando  $0 < a < 1$





1. Es una función decreciente

$$(x_2 > x_1 \leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1})$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$



Si  $a=1$  entonces

$$E_1(x) = \{(x; y)/y=1; x \in \mathbb{R}\}$$

Es decir:  $f(x)=1$  es una función constante y no se considera como una función exponencial.

## FUNCIÓN LOGARITMO

Denotamos la inversa de la función exponencial  $E_a$  por  $\log_a$  y la llamamos función logarítmica con base "a" ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ).

$$\log_a = \{(x; \log_a x)/x \in \mathbb{R}^+\}$$

o también  $f: <0; +\infty> \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = \log_a x$$

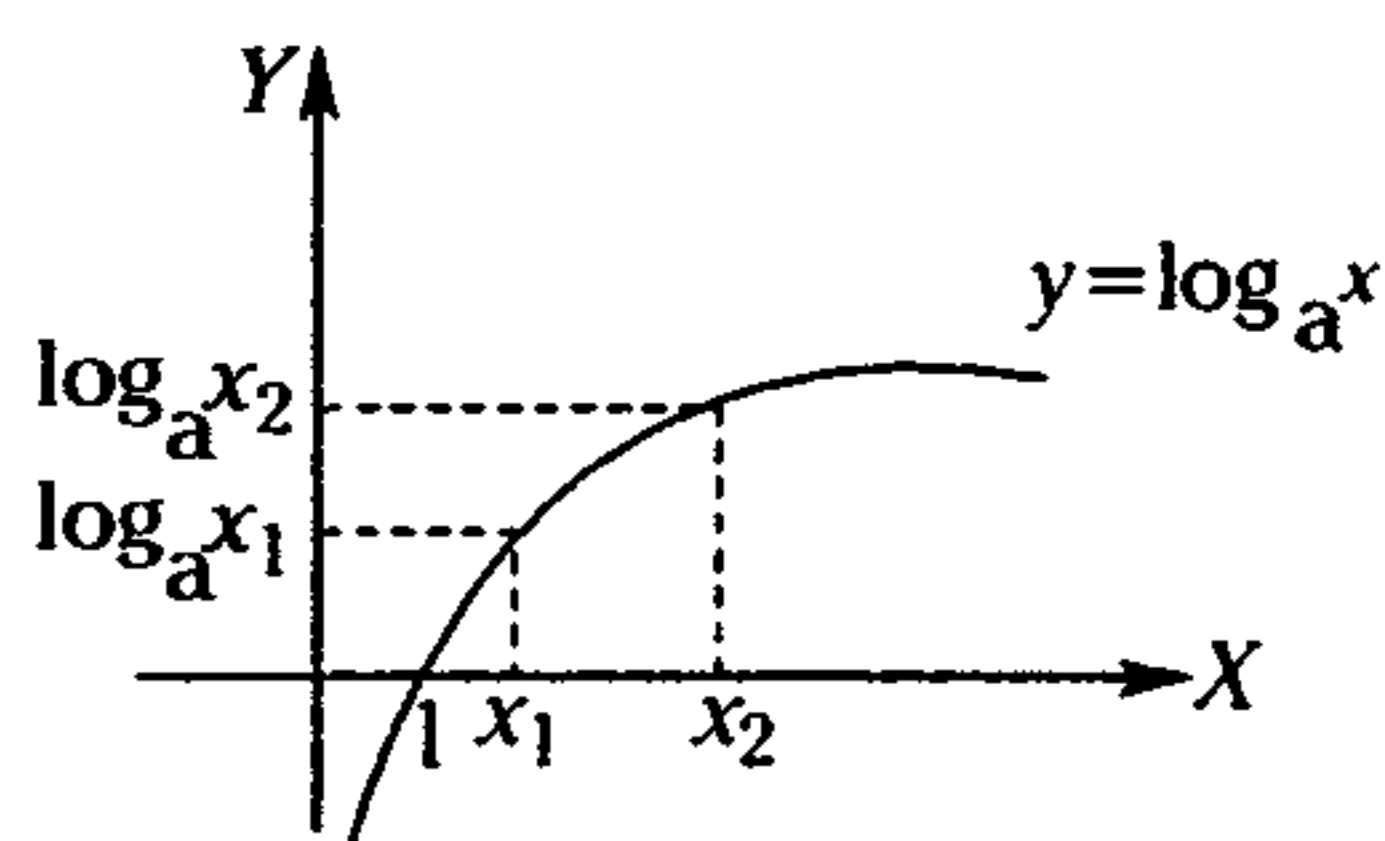
Donde  $\text{Dom}(f) = <0; +\infty>$

$$\text{Ran}(f) = <-\infty; +\infty> = \mathbb{R}$$

Gráfica:

Cuando  $a > 1$

$$(x_2 > x_1 \leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1)$$



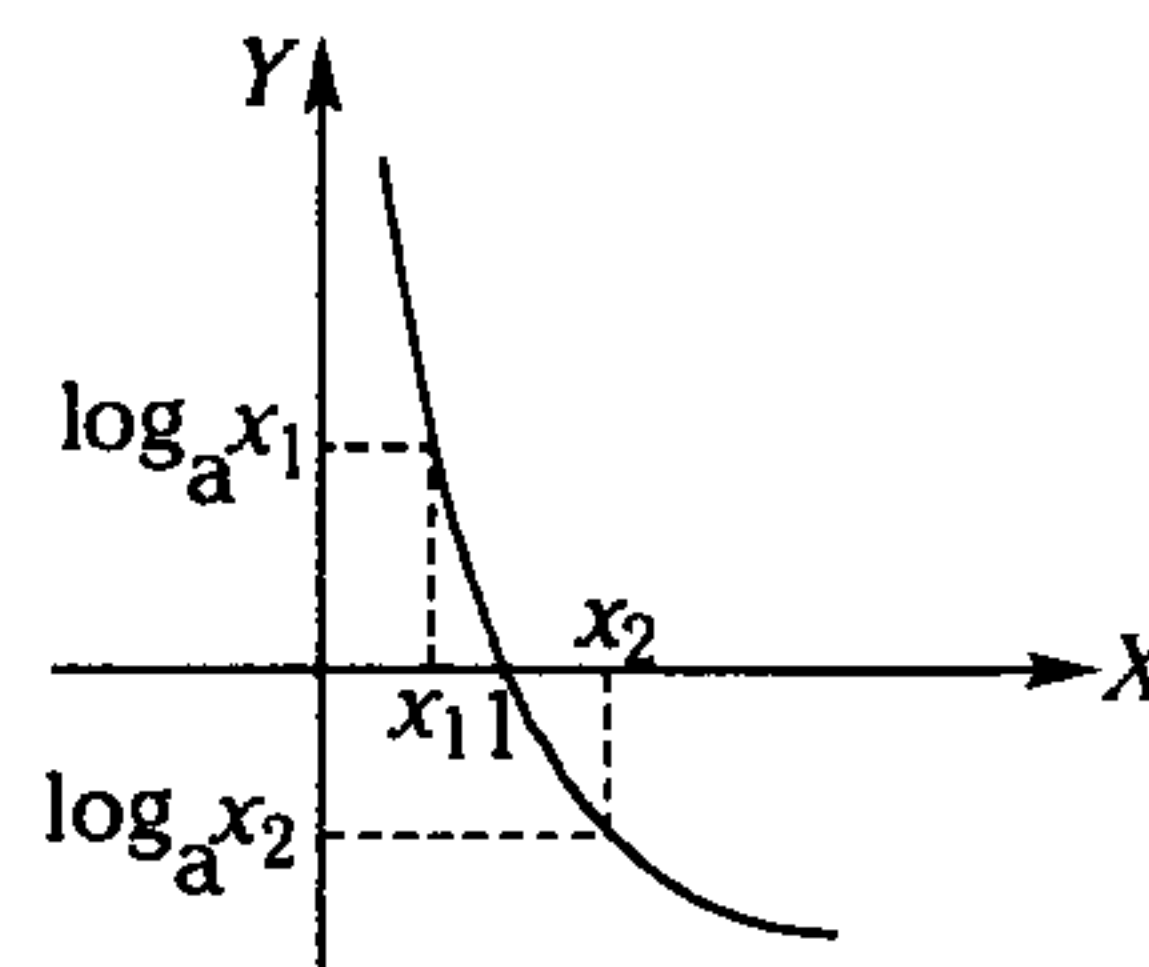
Se observa que:

1. Es una función creciente

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$

Cuando  $0 < a < 1$



1. Es una función decreciente

$$(x_2 > x_1 \leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1)$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$

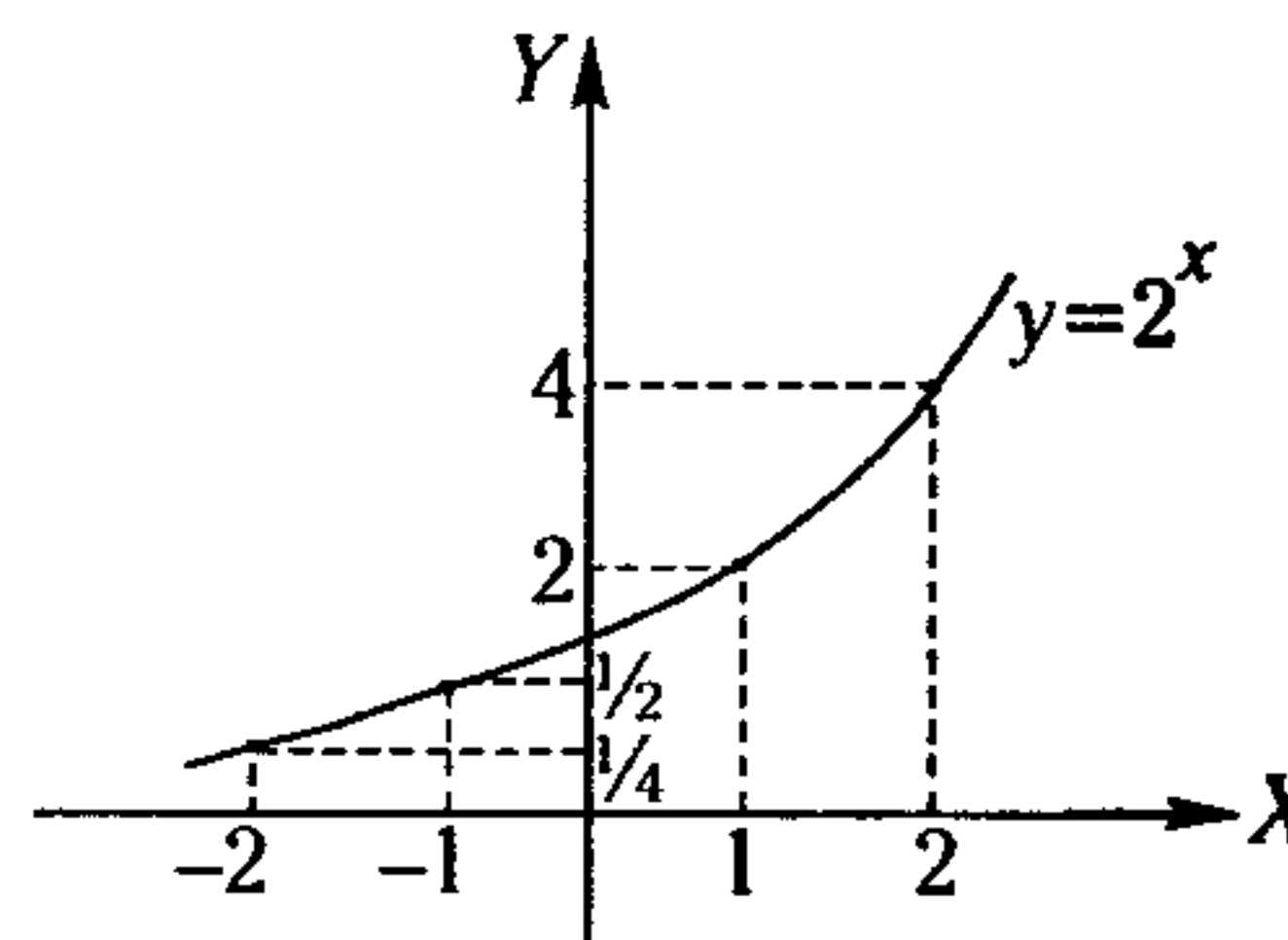
Ejemplo:

Graficar la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

Tabulando:

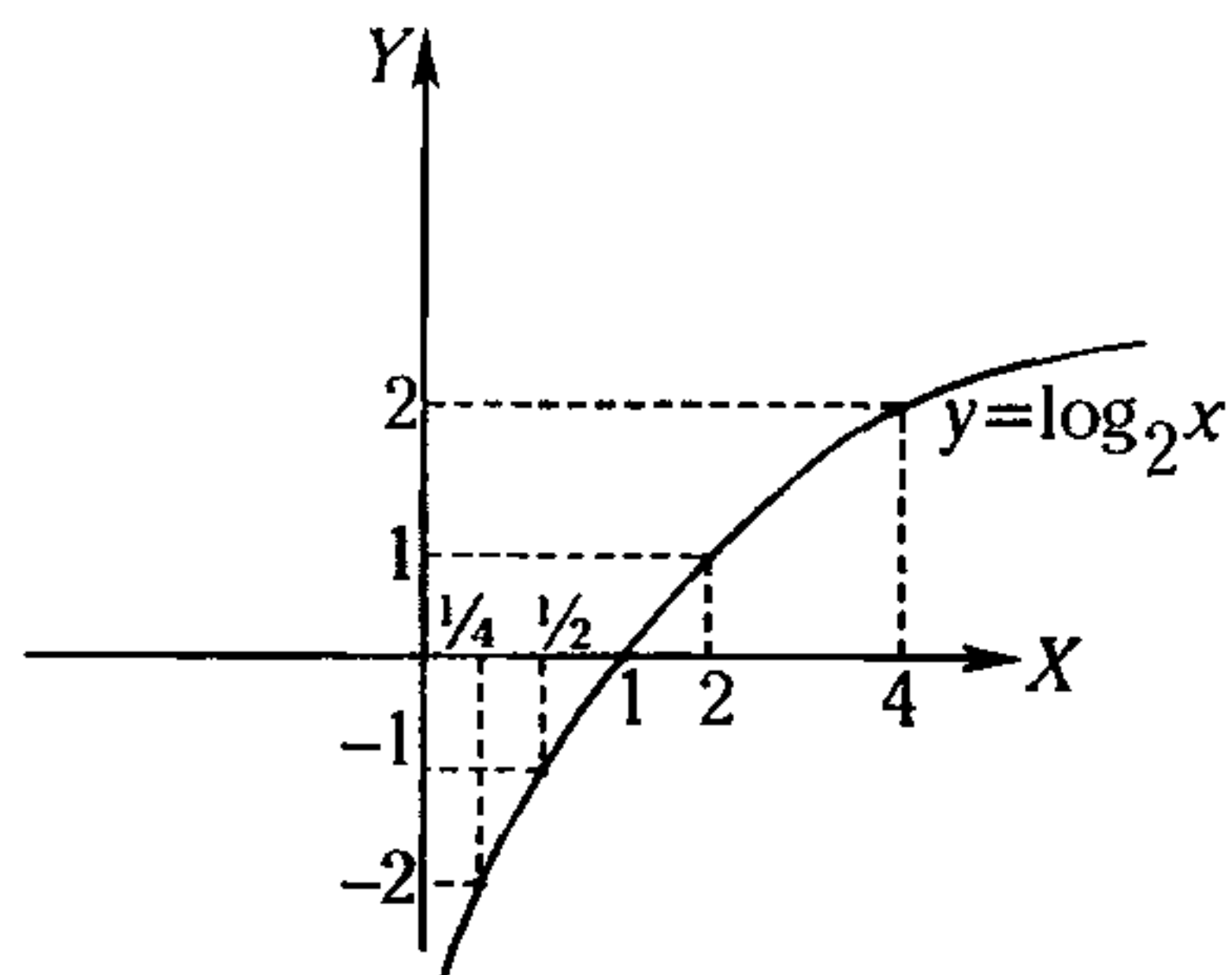
$x$	1	0	-1	2	-2	...
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	...



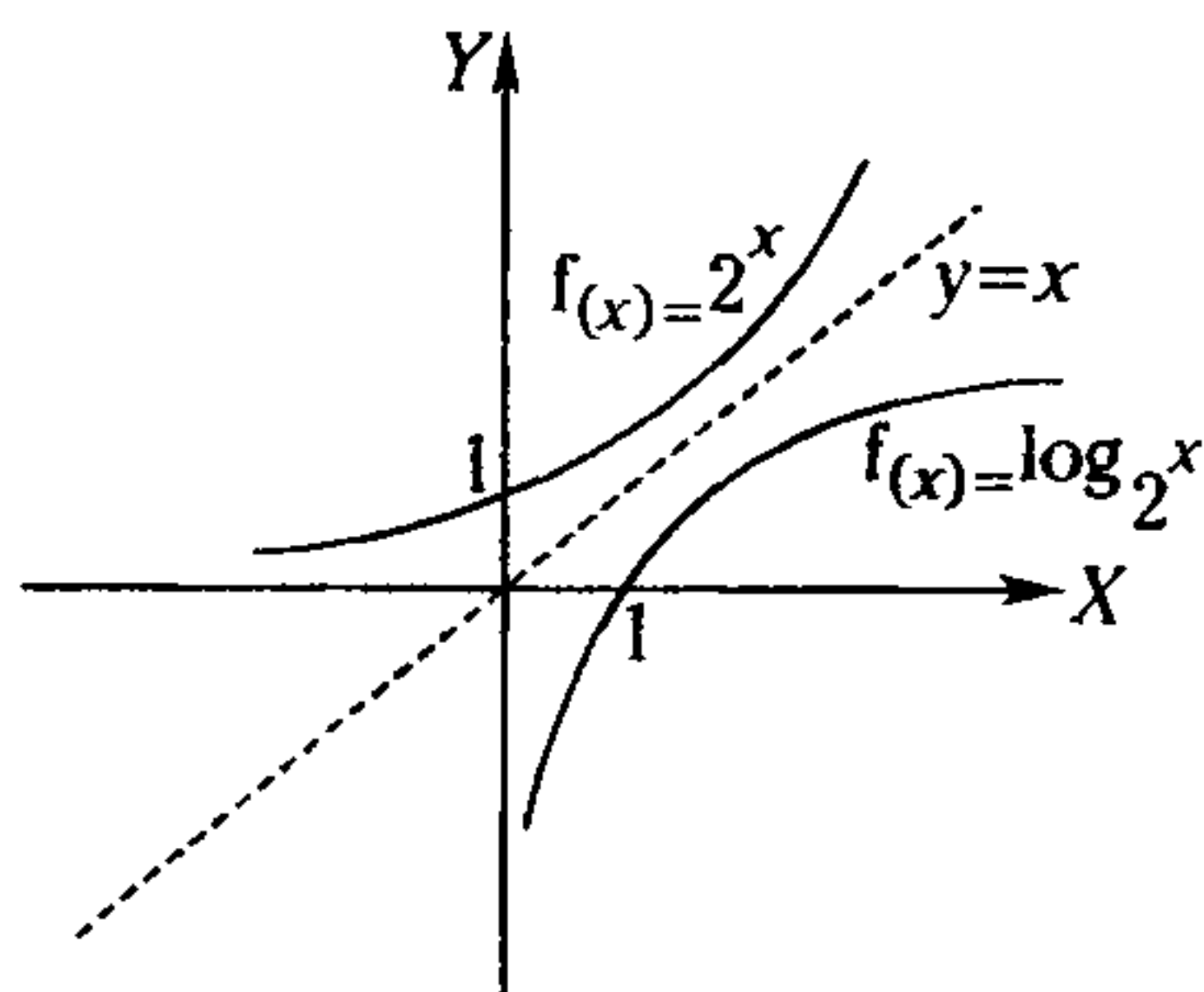
Graficar la función logarítmica  
 $f(x) = \log_2 x$

Tabulando:

$x$	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	...
$f(x)$	0	1	-1	2	-2	...



Podemos observar que una función es inversa de la otra; gráficamente son simétricas con respecto a la función identidad.

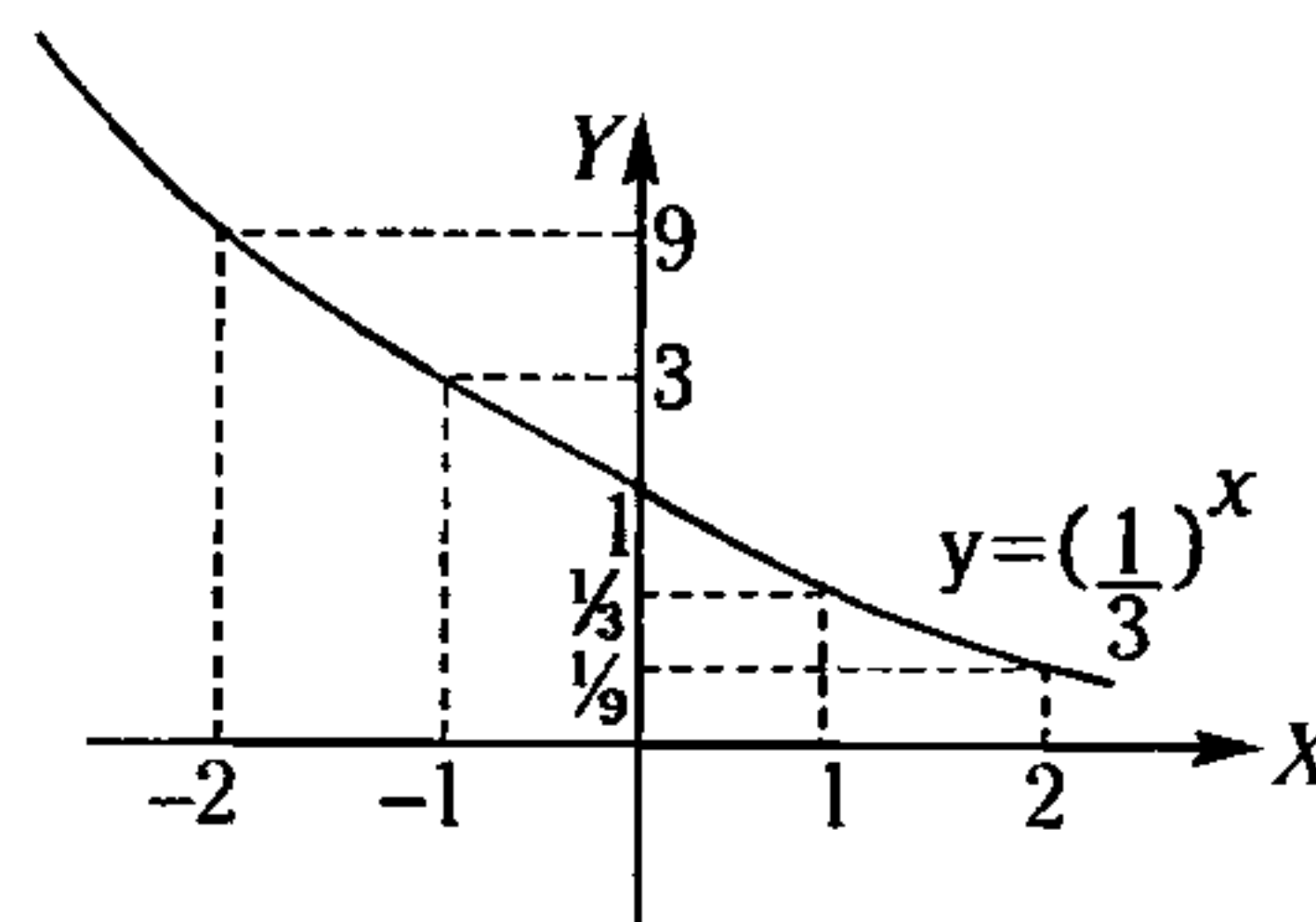


Graficar la función exponencial

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Tabulando:

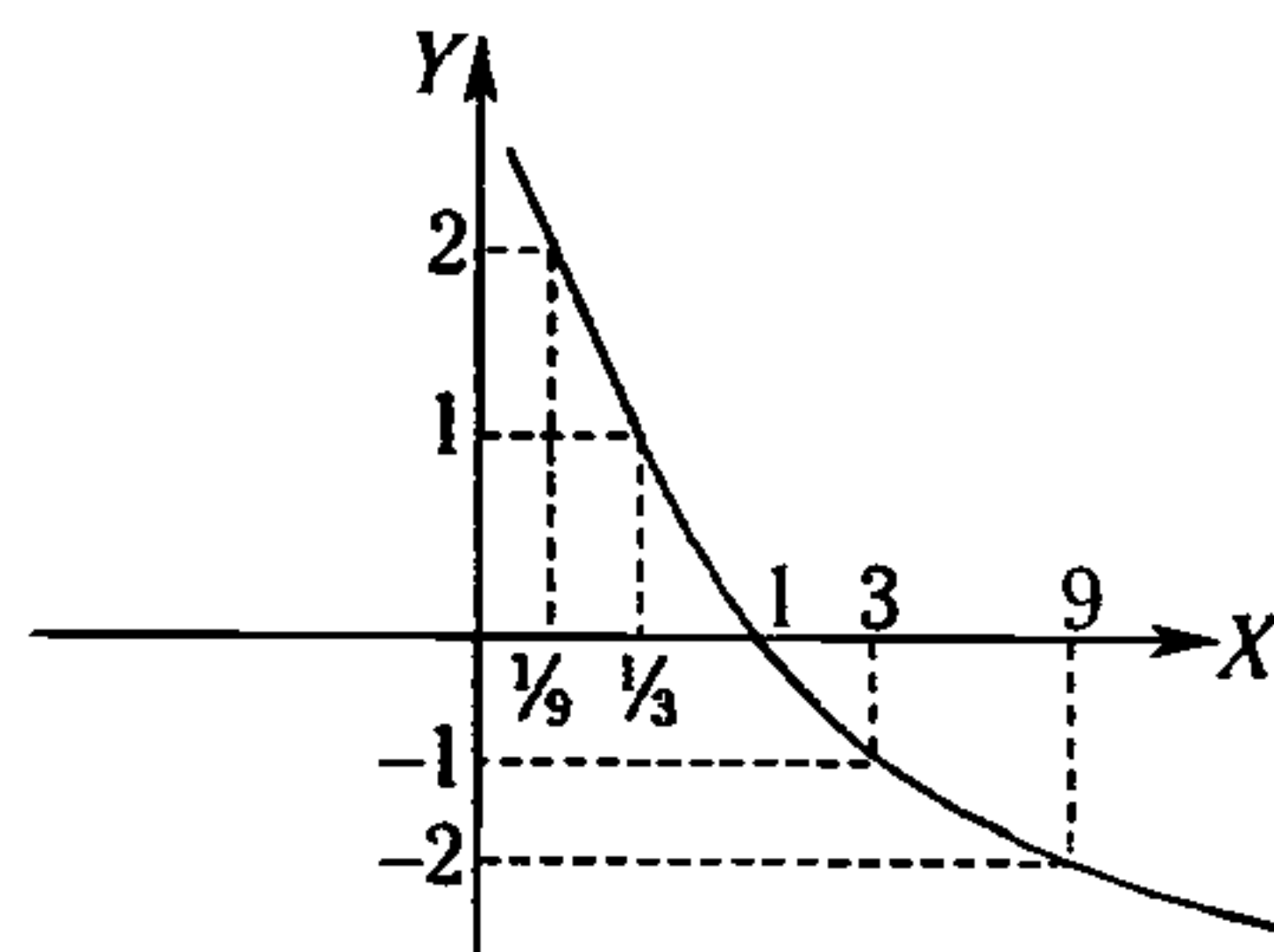
$x$	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{9}$	...



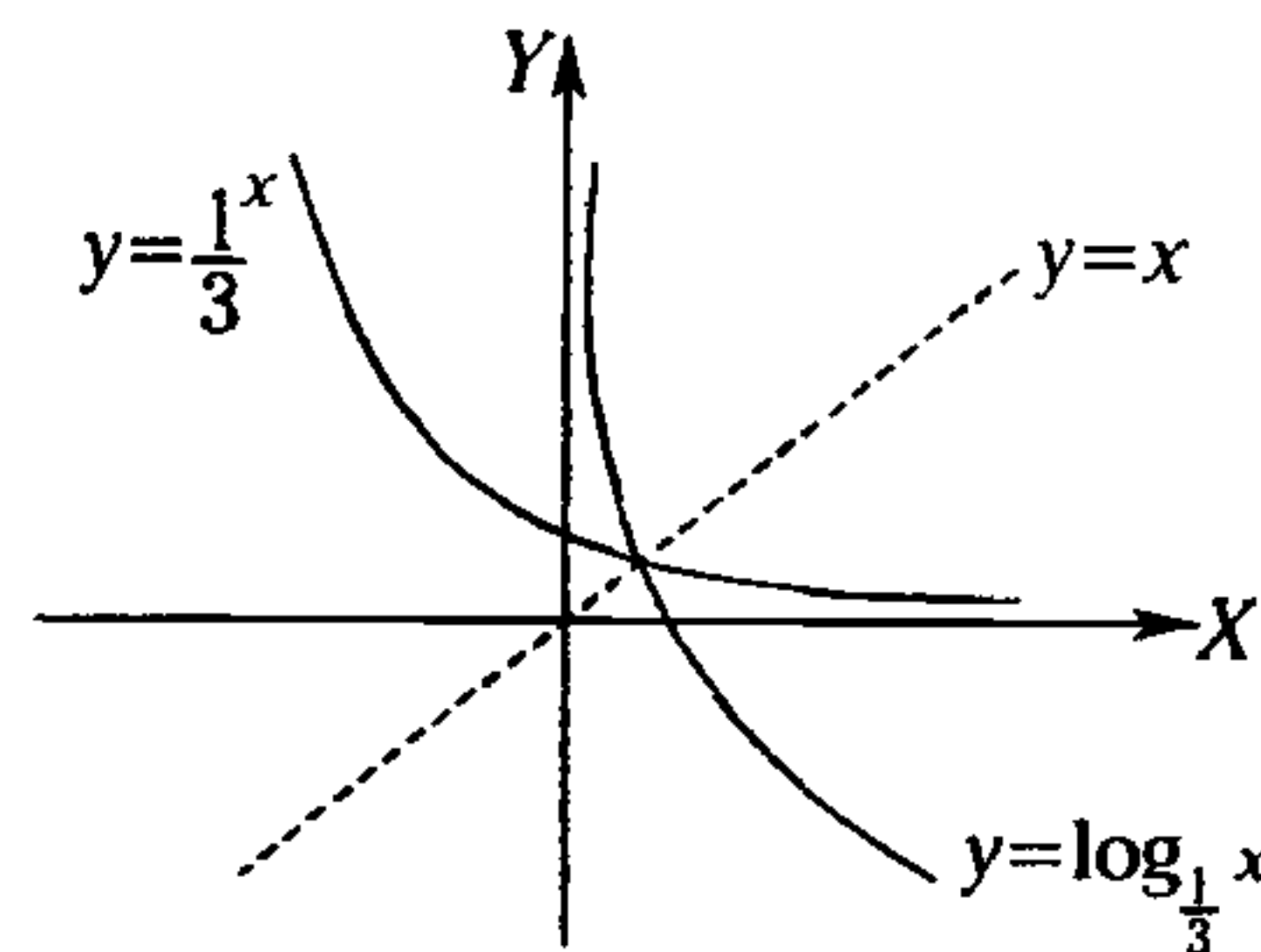
Graficar la función logarítmica  
 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Tabulando:

$x$	1	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{9}$	9	...
$f(x)$	0	1	-1	2	-2	...



Observamos nuevamente que una función es inversa de la otra; gráficamente serán simétricos con respecto a la función identidad.

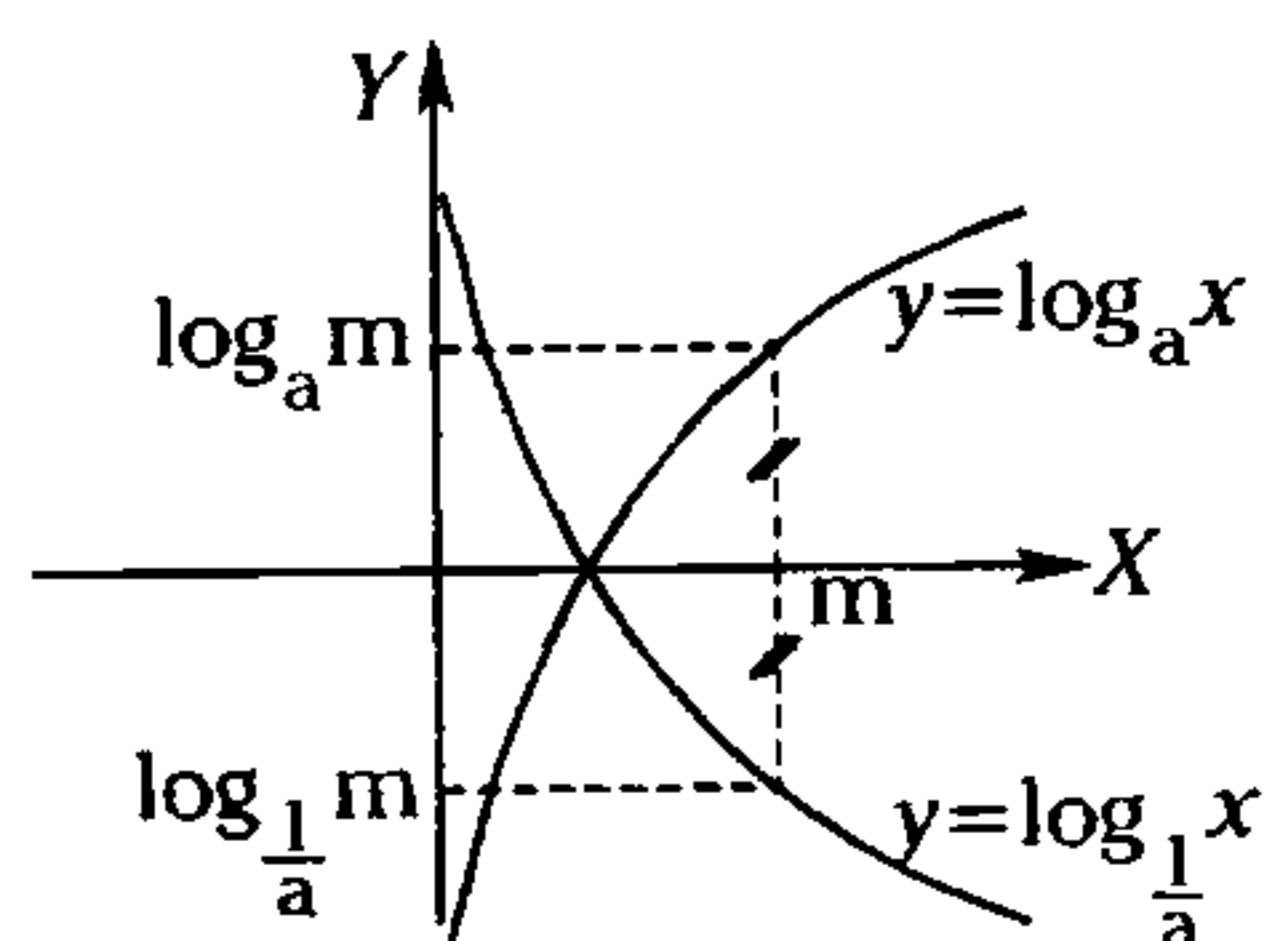


**RESULTADOS IMPORTANTES**

1. Si  $a > 1$  entonces  $0 < \frac{1}{a} < 1$  por ello:

$$\log_a x = \log_{\left(\frac{1}{a}\right)} \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

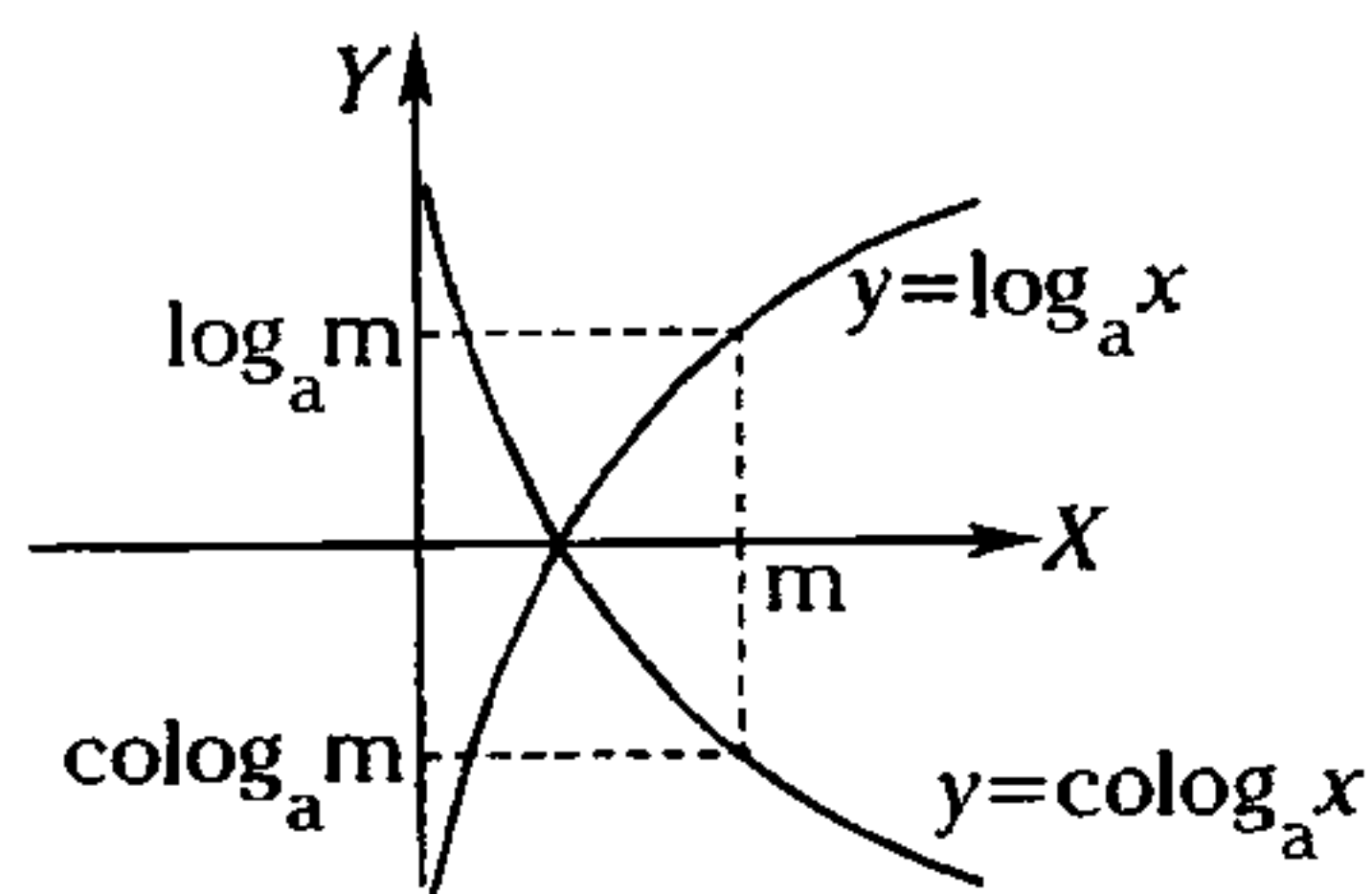
Así obtenemos el siguiente comportamiento de las gráficas.

**FUNCIÓN COLOGARÍTMO**

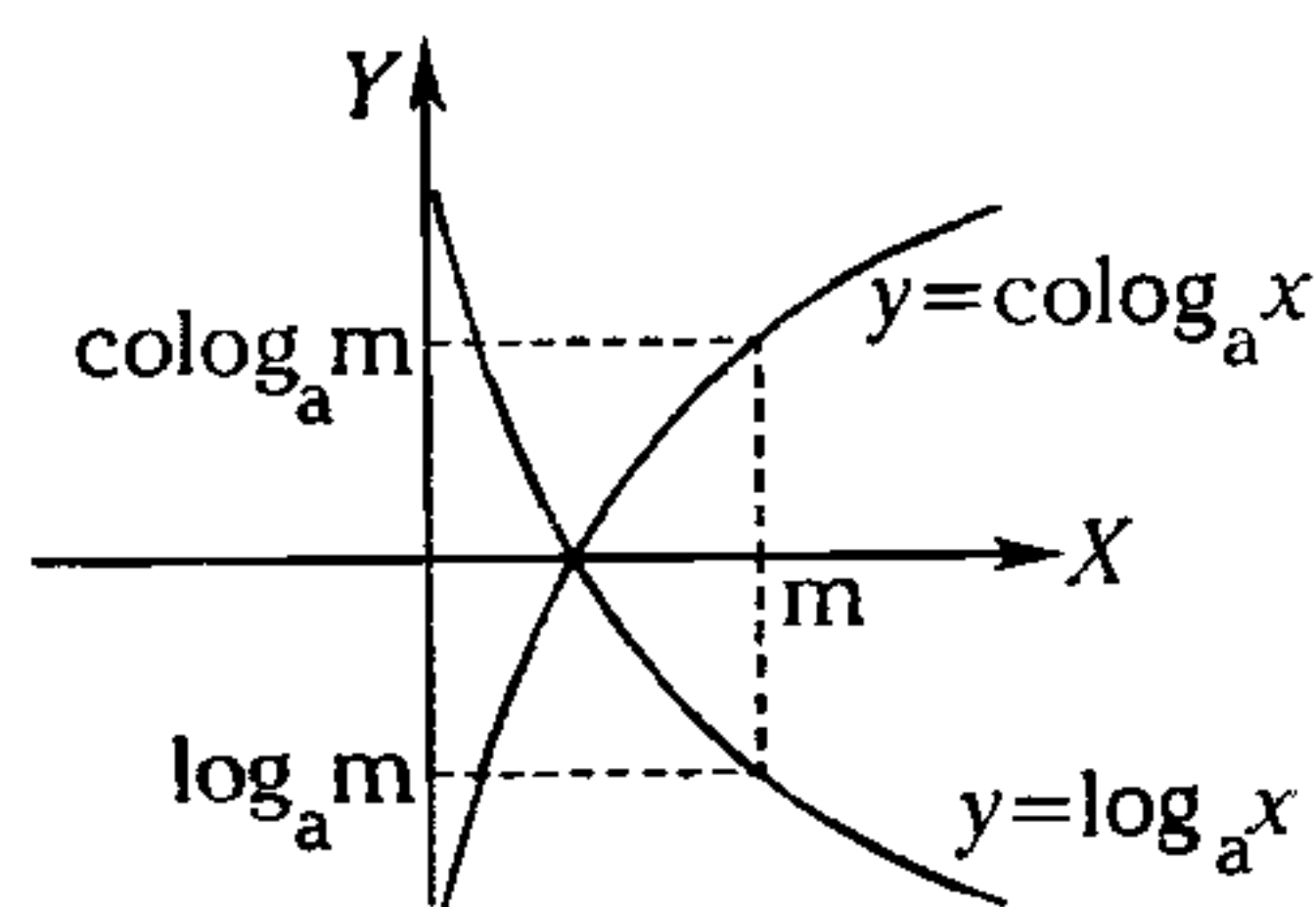
$$\forall x > 0; a > 0; a \neq 1$$

$$\text{colog}_a x = -\log_a x$$

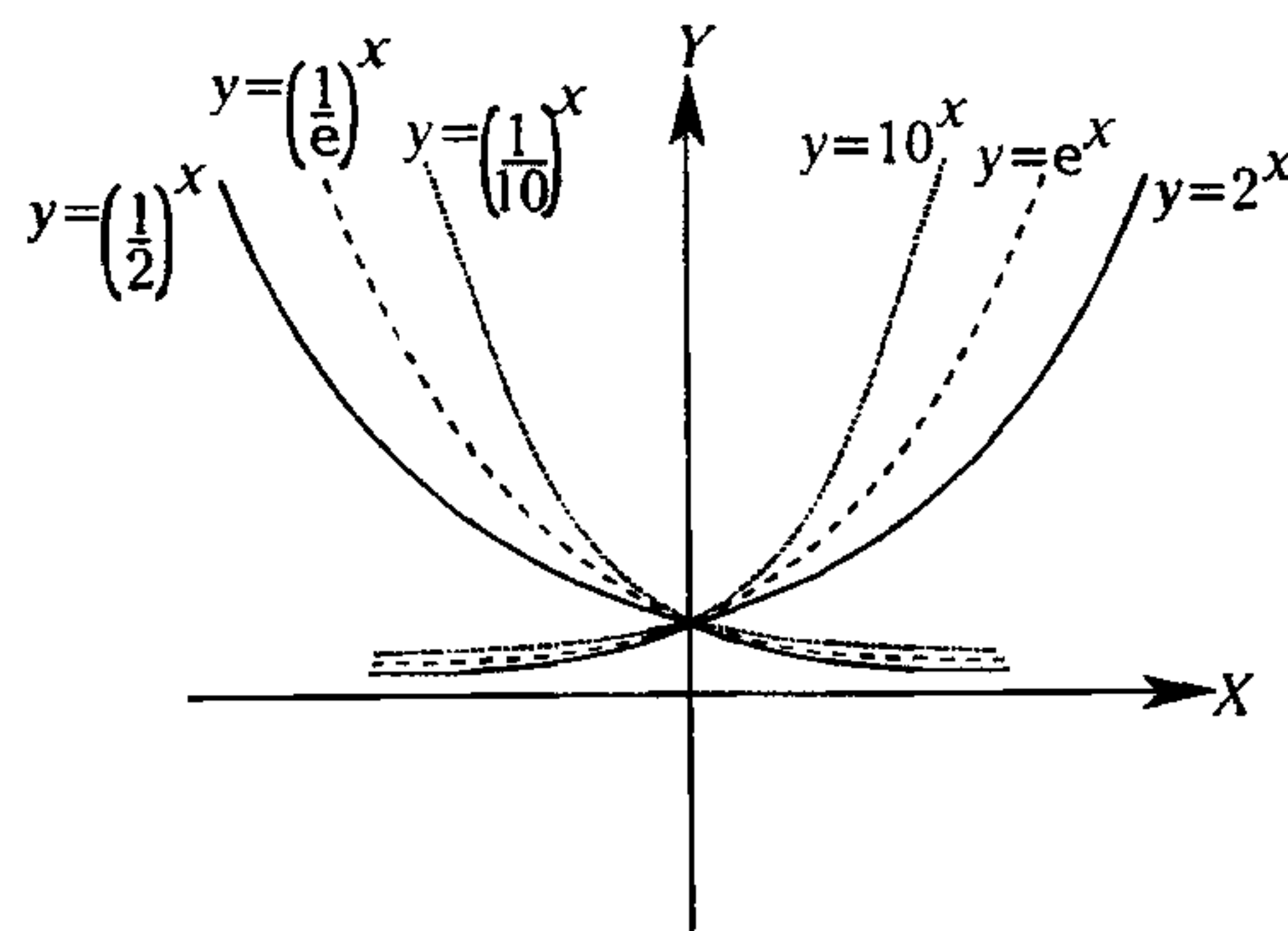
Si  $a > 1$



Si  $0 < a < 1$



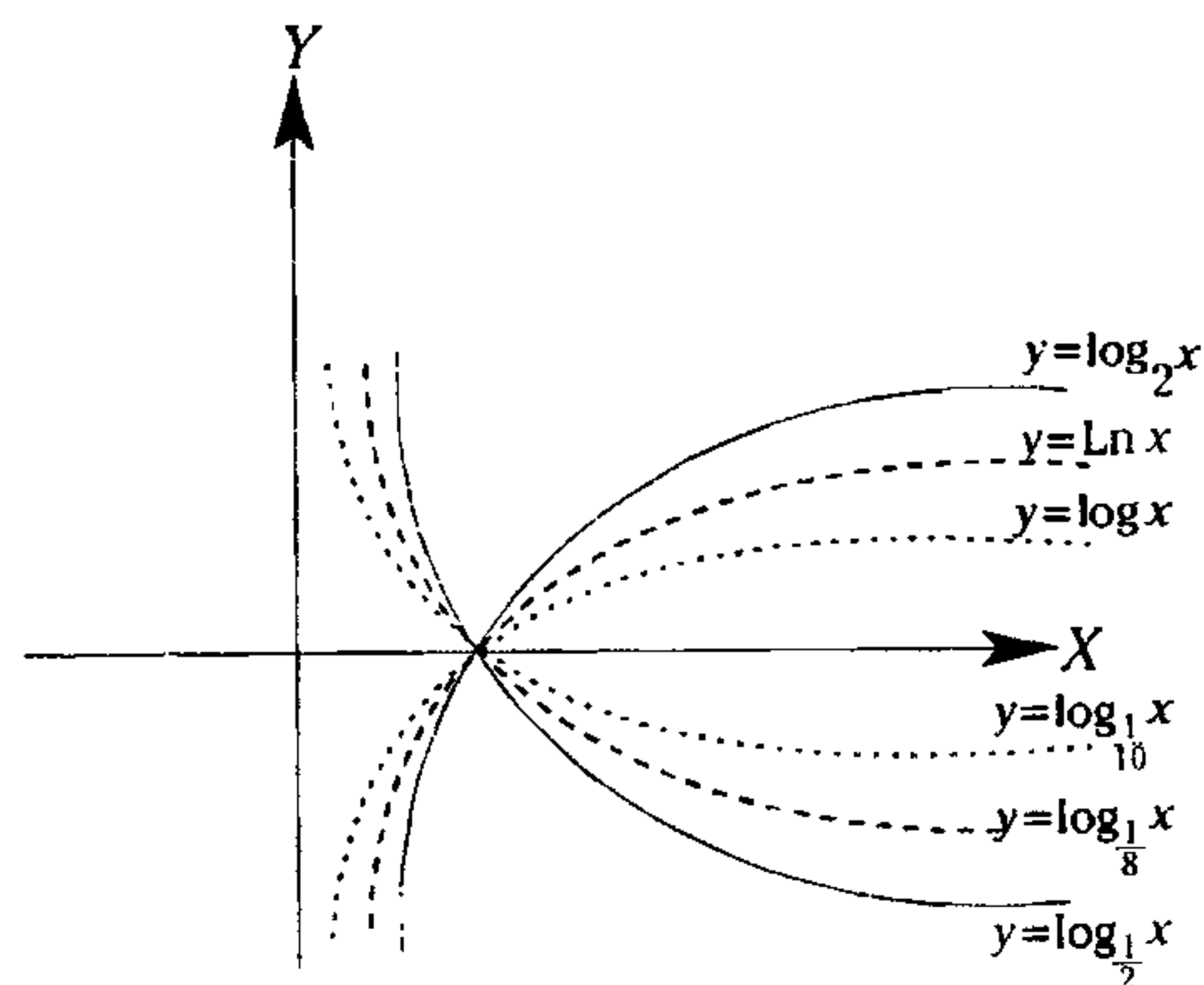
El comportamiento gráfico de la función logarítmica y función exponencial con respecto a sus bases son:



De aquí obtenemos que:

$$\text{Si } a > 1 \wedge m > n \Rightarrow a^m > a^n$$

$$\text{Si } 0 < a < 1 \wedge m > n \Rightarrow a^m < a^n$$



De aquí obtenemos que

$$\text{Si } a > b > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_b x$$

$$\text{Si } 0 < a < b < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_b x$$



**ECUACIÓN LOGARÍTMICA**

Es aquella ecuación trascendente donde, por lo menos, una incógnita está afectada del operador logarítmico.

**Ejemplos:**

1.  $\log_3(x+2) = \log_3(x-2)$
2.  $\log x(x^3-1) = 2$
3.  $\log(x^3+7x^2+2) = x+7$
4.  $x+\log_2 3 = 5 \rightarrow$  no es una ecuación logarítmica

**Resolución:**

Sea la ecuación:

$$\log_a M = \log_a N$$

1. Debemos garantizar la existencia de los logaritmos, para ello debemos analizar la base y las expresiones M y N que dependan de la incógnita, es decir, debemos hallar los valores de la incógnita que satisfagan lo siguiente.

$$M > 0 \wedge N > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

2. Hallamos los posibles valores de la incógnita haciendo:

$$M = N$$

3. Finalmente, las soluciones de la ecuación lo encontrarás intersectando los valores obtenidos en (1) y (2).

$$C.S. = (1) \cap (2)$$

**Resolver:**

1.  $\log_x(x-3) = \log_x(5-x)$ 
  - I.  $x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x-3 > 0 \wedge 5-x > 0$   
 $x > 3 \wedge x < 5$   
 $\Rightarrow x \in \langle 3, 5 \rangle$
  - II.  $x-3 = 5-x$   
 $\Rightarrow x = 4$
  - III.  $C.S. = (1) \cap (2) = \{4\}$

$$2. \log_2^2(16x) + \log_2^2(32x) = 13$$

$$I. x > 0$$

$$II. \log_2^2(16x) + (\log_2(16x) + 1)^2 = 13$$

$$\log_2^2(16x) + \log_2(16x) - 6 = 0$$

$$(\log_2(16x) + 3)(\log_2(16x) - 2) = 0$$

$$\log_2(16x) = -3 \vee \log_2(16x) = 2$$

Por definición:

$$x = \frac{1}{128} \quad \vee \quad x = \frac{1}{4}$$

$$III. C.S. = \left\{ \frac{1}{128}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$3. 3 + \log_x \log_3 x = 0$$

$$I. x > 0 \wedge \log_3 x > 0 \text{ (ver inecuación logarítmica)}$$

$$x > 3^0$$

$$\Rightarrow x > 1$$

$$II. \log_x(\log_3 x) = -3$$

$$\log_3 x = x^{-3}$$

$$x = 3^{x^{-3}}$$

$$x = 3^{\frac{1}{x^3}}$$

$$x^{x^3} = 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$III. C.S. = \{\sqrt[3]{3}\}$$

## INECUACIÓN LOGARÍTMICA

Esta inecuación se caracteriza por tener al menos una incógnita afectada del operador logarítmico.

## Ejemplos:

- $\log_2(x+5) > \log_2 x$
- $\log_x(x+1) \leq \log_x(\operatorname{sen} x)$

$$3. \quad x^3 + \log \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \operatorname{sen} x$$

↪ No es una inecuación  
logarítmica

## Resolución:

Sea la inecuación:  $\log_a M > \log_a N$

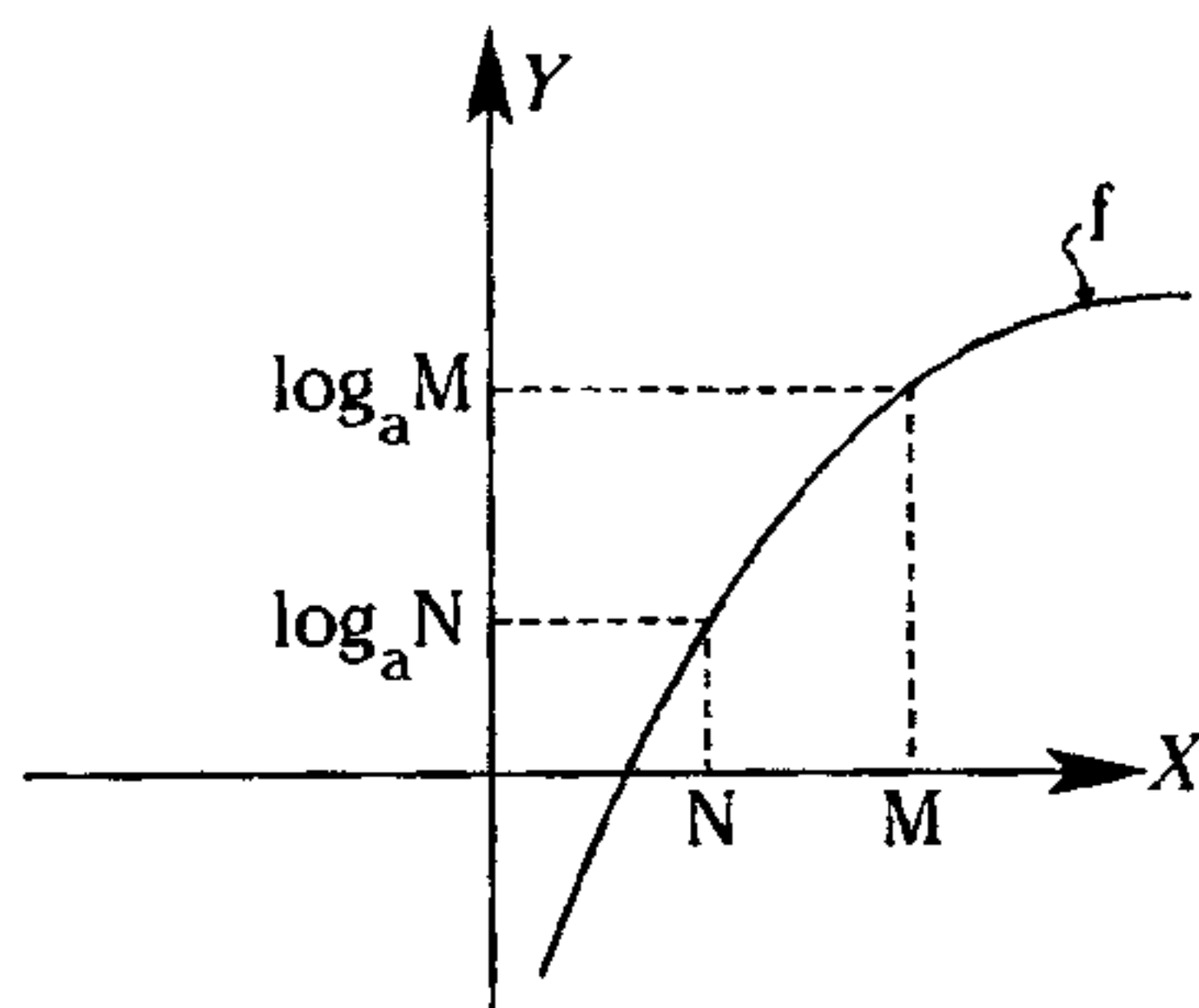
- Garantizamos la existencia de los logaritmos, por definición se debe cumplir:

$$M > 0 \wedge N > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

- Dependiendo del valor de la base, pueden presentarse dos casos:

## 1° Caso:

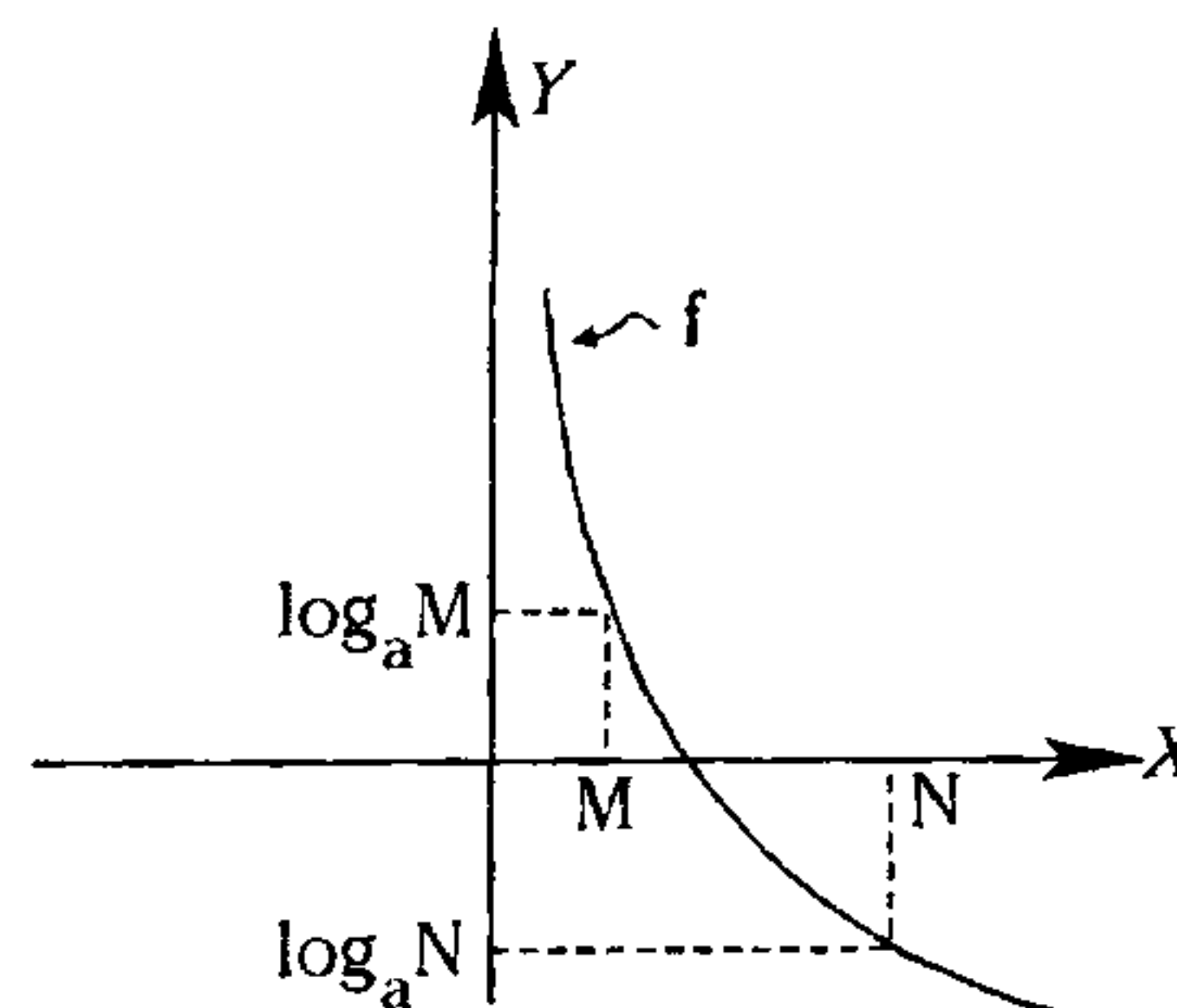
$$\text{Si } a > 1 \wedge \log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M > N \quad \dots(\alpha)$$



Donde:  $f(x) = \log_a x$

## 2° Caso:

$$\text{Si } 0 < a < 1 \wedge \log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M < N \quad \dots(\beta)$$



Donde:  $f(x) = \log_a x$

- El conjunto solución se obtiene intersectando los valores obtenidos en (1) y (2).

$$C.S. = \textcircled{1} \cap \textcircled{2} \cup \textcircled{3}$$

## Caso particular

Sea M positivo

$$\log_a M > 0$$

Si  $a > 1 \rightarrow M > 1$   
Si  $0 < a < 1 \rightarrow M < 1$

**NOTA**

Al resolver una inecuación se observa que cuando:

- $a > 1$  el sentido de la desigualdad no cambia.
- $0 < a < 1$  el sentido de la desigualdad si cambia.

## Resolver:

- $\log_2(3-x) > 0$ 
  - $3-x > 0 \rightarrow x < 3$
  - $3-x > 2^0$   
 $x < 2$
  - C.S. =  $< -\infty; 2 >$

$$2. \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0$$

$$I. \quad x-1 > 0 \\ x > 1$$

$$II. \quad x-1 < 1 \\ x < 2$$

$$III. \quad C.S. = \langle 1; 2 \rangle$$

$$3. \log_{\pi}(2x-1) < 0$$

$$I. \quad 2x-1 > 0 \\ x > \frac{1}{2}$$

$$II. \quad (2x-1) < 1 \\ x < 1$$

$$III. \quad C.S. = \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$$

$$4. \log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1) < 0$$

$$I. \quad x^2+x+1 > 0$$

Por teorema de trinomio positivo

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$II. \quad x^2+x+1 > 1$$

$$x^2+x > 0$$

$$x(x+1) > 0$$



$$x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

$$III. \quad C.S. = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

$$5. \log_2(2x-1) > \log_2(x-5)$$

$$I. \quad 2x-1 > 0 \wedge x-5 > 0 \\ x > \frac{1}{2} \wedge x > 5$$

$$x > \frac{1}{2} \wedge x > 5$$

$$\Rightarrow x > 5$$

II. Como la base es mayor que uno entonces:

$$2x-1 > x-5$$

$$x > -4$$

$$III. \quad C.S. = \langle 5; +\infty \rangle$$

$$6. \quad 2\log_{\frac{1}{3}}x \geq \log_{\frac{1}{3}}(7x+6)$$

$$I. \quad x > 0 \wedge 7x+6 > 0$$

$$x > 0 \wedge x > -\frac{6}{7} \Rightarrow x > 0$$

$$II. \quad \log_{\frac{1}{3}}x^2 \geq \log_{\frac{1}{3}}(7x+6)$$

Como las bases son menores que uno, entonces:  $x^2 \leq 7x+6$

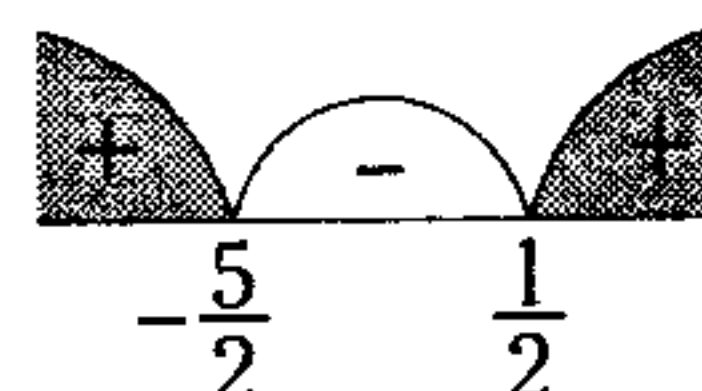
$$(x-6)(x-1) \leq 0$$

$$x \in [1; 6]$$

$$III. \quad C.S. = [1; 6]$$

$$7. \quad \log_x\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right) > 1$$

$$I. \quad x > 0 \wedge \frac{2x+5}{2x-1} > 0$$



$$x \in \left\langle -\infty; -\frac{5}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle \wedge x > 0$$

$$\Rightarrow x \in \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle \dots\dots\dots (\alpha)$$

II. Podemos observar que de la parte (I) obtendremos 2 casos.

**1º caso:**

$$\text{Si } x \in \langle 1/2; 1 \rangle$$

$$\text{Entonces } \frac{2x+5}{2x-1} < x$$

Se resuelve

$$x \in \langle -1; 1/2 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \dots\dots\dots (1)$$

**2º caso**

$$\text{Si } x \in \langle 1; +\infty \rangle$$

$$\text{Entonces } \frac{2x+5}{2x-1} > x$$

Se resuelve  $x \in \langle -$

$$\Rightarrow x \in \langle 1; 5/2 \rangle \dots\dots\dots$$

$$III. \quad x \in (\alpha) \cap [(1) \cup (2)]$$

$$C.S. = [x \in \emptyset \cup x \in \langle 1; 5/2 \rangle] \\ = x \in \langle 1; 5/2 \rangle$$



# Problemas Resueltos

## Problema 1

Si  $\log_a b = 2$  y  $\log_b c = 3$

Calcular:  $\log_{a^3}(b^2 c^4)$

### Resolución:

Por definición de logaritmos tenemos que:

$$b = a^2$$

$$c = b^3$$

Se reemplaza

$$\log_{a^3}(b^2 c^4) = \log_{a^3}(a^4 b^{12}) = \log_{a^3}(a^4 a^{24})$$

$$= \log_{a^3} a^{28} = \frac{28}{3}$$

$$= \log_8 16^{\log_4 3^2}$$

$$= \log_8 16^{\log_4 2}$$

$$= \log_8 16^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$$

## Problema 2

Si  $\log_2 3 = m$ , hallar  $\log_{36} 243$  en términos de  $m$ .

### Resolución:

Debemos expresar  $\log_{36} 243$  en función de  $\log_2 3$ , así

$$\log_{36} 243 = \frac{1}{\log_{243} 36} = \frac{1}{\log_{3^5} (2 \times 3)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{5} [\log_3 2 + \log_3 3]}$$

$$= \frac{5}{2 \left( \frac{1}{m} + 1 \right)} = \frac{5m}{2(m+1)}$$

## Problema 3

Reducir la siguiente expresión:

$$M = \log_8 16^{\log_4 3^{(\log_2 3)^{-1}}}$$

### Resolución:

$$M = \log_8 16^{\log_4 3^{\frac{1}{\log_2 3}}}$$

## Problema 4

Si se cumple que

$$\log_b^2 a + 1 = x \log_b a \quad ; \quad a > 1 \wedge b > 1$$

$$\text{Calcular: } R = \frac{x^3 - 3x}{\log_b^3 a + \log_a^3 b}$$

### Resolución:

Del dato tenemos

$$x = \frac{\log_b^2 a}{\log_b a} + \frac{1}{\log_b a}$$

$$x = \log_b a + \log_a b$$

Elevando al cubo

$$x^3 = \log_b^3 a + \log_a^3 b + \underbrace{3 \log_b a \log_a b}_{1} \underbrace{(\log_b a + \log_a b)}_x$$

$$x^3 - 3x = \log_b^3 a + \log_a^3 b$$

$$\therefore R = 1$$

## Problema 5

Si  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\log_y x + \log_x y = \frac{10}{3} \quad y \quad xy = 256$$

Halle:  $\frac{x+y}{2}$

**Resolución**

Se hace el siguiente cambio

Si  $\log_y x = m \rightarrow \log_x y = \frac{1}{m}$

utilizando el dato

$$m + \frac{1}{m} = \frac{10}{3}$$

Se resuelve  $m = 3$  ó  $m = \frac{1}{3}$

Si  $m = 3 = \log_y x \Rightarrow x = y^3$

como  $xy = 256$

$$y^4 = 256$$

Se resuelve:  $y = 4i$ ;  $y = -4i$ ;  $y = 4$ ;  $y = -4$

pero  $y > 0 \rightarrow y = 4$

luego  $x = 64$

$$\therefore \frac{x+y}{2} = 34$$

**Problema 6**

Si  $\log_c a + \log_c b = 1$ ; si  $a, b, c > 0$  y  $c \neq 1$  definimos

$$x_n = \log_c a c^{n-1} + \log_c b c^{n-1}; n \in \mathbb{N}$$

Determinar el valor de

$$S = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n^2}$$

**Resolución:**

El dato:  $\log_c a + \log_c b = 1$

$$\log_c ab = 1$$

$$ab = c$$

como

$$x_n = \log_c (ac^{n-1}) (bc^{n-1})$$

Se reemplaza

$$x_n = \log_c abc^{2n-2} = \log_c c^{2n-1} = 2n-1$$

Luego

$$S = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n-1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$

**Problema 7**

Si  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  tal que  $x, y, z$  están en progresión geométrica en ese orden, además  $\log z = 3 \log x$ .

Simplificar

$$R = \frac{\log_x 9 - \log_y 9}{\log_y 9 - \log_z 9}$$

**Resolución:**

Del dato  $\div \dots x : y : z \dots$

Por propiedad  $xz = y^2$

$$\rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$R = \frac{\frac{1}{\log_9 x} - \frac{1}{\log_9 y}}{\frac{1}{\log_9 y} - \frac{1}{\log_9 z}} = \frac{\log_9 \left( \frac{y}{x} \right)}{\frac{\log_9 \left( \frac{z}{y} \right)}{\log_9 y \log_9 z}}$$

$$= \frac{\cancel{\log_9 y} \log_9 \left( \frac{y}{x} \right) \log_9 z}{\cancel{\log_9 y} \log_9 \left( \frac{z}{y} \right) \log_9 x}$$

Se cambia a base 10.

Dato:  $\log 2 = 3 \log x$

$$= \frac{\log z}{\log x} = 3$$

**Problema 8**

Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c > 0; b \neq 1$$

de raíces:  $\log_b a$  y  $\log_b c$

Calcular:

$$(b^2 - 4ac) \log_{\frac{a}{c}} b$$

**Resolución:**

Por las propiedades de la suma y producto de raíces y la identidad de Legendre tenemos que:

$$\underbrace{(\log_b a + \log_b c)^2}_{\left(\frac{b}{a}\right)^2} - \underbrace{(\log_b a - \log_b c)^2}_{\log^2_b \left(\frac{a}{c}\right)} = \underbrace{4 \log_b a \log_b c}_{\frac{4c}{a}}$$

Efectuando:  $a^2 \log^2_b \left(\frac{a}{c}\right) = b^2 - 4ac$

$$a^2 \cdot \left[ \frac{1}{\log \left(\frac{a}{c}\right) b} \right]^2 = b^2 - 4ac$$

$$\therefore (b^2 - 4ac) \log^2_{\left(\frac{a}{c}\right)} b = a^2$$

**Problema 9**

Indique la suma de soluciones de la siguiente ecuación:

$$x^{2x^2} - x^x = 0$$

**Resolución:**

$$x^{2x^2} = x^x$$

Tomando logaritmos en base 10

$$\log x^{2x^2} = \log x^x$$

$$2x^2 \log x = x \log x$$

$$x \log x (1 - 2x) = 0$$

Se iguala cada factor a cero

$$x = 0 \quad \vee \quad \log x = 0 \quad \vee \quad 1 - 2x = 0$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = \frac{1}{2}$$

Se analiza la ecuación  $x \neq 0$ , entonces

$$\text{C.S.} = \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\}$$

$\therefore$  La suma de soluciones es  $\frac{3}{2}$

**Problema 10**

Resolver la ecuación:  $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$

**Resolución:**

Tomando logaritmo en base 2

$$\log_2 3^x + \log_2 8^{\frac{x}{x+2}} = \log_2 6$$

$$x \log_2 3 + \frac{3x}{x+2} = 1 + \log_2 3$$

Se efectúa convenientemente

$$(\log_2 3)x^2 + (\log_2 3 + 2)x - (2 + 2\log_2 3) = 0$$

Luego:  $x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{2(1 + \log_2 3)}{\log_2 3}$   
 $x = 2(\log_2 3 + 1)$

**Problema 11**

Si  $x$  e  $y$  son valores que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} e^x = y^e \\ 4x = e(4 + \ln^2 y) \end{cases}$$

siendo  $2 < e < 3$ , entonces  $xy$  es:

**Resolución:**

Se toma logaritmo neperiano a la primera ecuación:

$$\begin{cases} x = e \ln y & \dots (1) \\ 4x = e(4 + \ln^2 y) & \dots (2) \end{cases}$$

Se reemplaza (1) en (2)

$$4e \ln y = e(4 + \ln^2 y)$$

$$\ln^2 y - 4 \ln y + 4 = 0$$

$$(\ln y - 2)^2 = 0$$

$$\ln y = 2$$

$$y = e^2$$

$$\rightarrow x = e \ln e^2 = 2e$$

$$\therefore xy = 2e^3$$



**Problema 12**

Si  $x_0$  es la solución de la ecuación:

$$x \log x + \log(\log x) = 0,47712 \dots + \log(\log(\log x))$$

Hallar el valor:

$$\frac{\log^3 x_0}{x_0^{x_0^{x_0}}}$$

**Resolución:**

Sabemos que  $0,47712 \approx \log 3$ ,  
entonces

$$\log x^x + \log(\log x) = \log 3 + \log(\log(\log x))$$

$$\log(x^x \log x) = \log(3 \log(\log x))$$

$$x^x \log x = 3 \log(\log x)$$

$$\log x^{x^x} = \log(\log x)^3$$

$$x^{x^x} = \log^3 x$$

Como  $x_0$  es solución entonces

$$x_0^{x_0^{x_0}} = \log^3 x_0$$

$$\therefore \frac{\log^3 x_0}{x_0^{x_0^{x_0}}} = 1$$

**Problema 14**

Se sabe que:

$$x^2 [\log_a^2 10 + \log_b^2 10 + \log_c^2 10] + 3 = \frac{2x}{\log a} + \frac{2x}{\log b} + \frac{2x}{\log c}$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ . Halle el valor de "x" para  $abc = 1000$

**Resolución:**

Se efectúa

$$(x \log_a 10)^2 + (x \log_b 10)^2 + (x \log_c 10)^2 + 3 = 2x \log_a 10 + 2x \log_b 10 + 2x \log_c 10$$

Completando cuadrados

$$\underbrace{(x \log_a 10)^2 - 2x \log_a 10 + 1}_{(x \log_a 10 - 1)^2} + \underbrace{(x \log_b 10)^2 - 2x \log_b 10 + 1}_{(x \log_b 10 - 1)^2} + \underbrace{(x \log_c 10)^2 - 2x \log_c 10 + 1}_{(x \log_c 10 - 1)^2} = 0$$

**Problema 13**

Al resolver el sistema

$$\begin{cases} -2 \operatorname{colog} x + 3 \log(yz) = 11 \\ \log xy + 2 \operatorname{colog} z = -\operatorname{antilog}_{\sqrt{3}} 2 \\ \operatorname{colog} y + 2 \log xz = 6 \end{cases}$$

Indique el valor de:  $\log_{yz} x$

**Resolución:**

Aplicando propiedades y definiciones, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2 \log x + 3 \log y + 3 \log z = 11 \\ \log x + \log y - 2 \log z = -3 \\ -\log y + 2 \log x + 2 \log z = 6 \end{cases}$$

Se hace cambios de variable

$$\begin{cases} 2a + 3b + 3c = 11 \\ a + b - 2c = -3 \\ -b + 2a + 2c = 6 \end{cases}$$

Al resolver tenemos:

$$\begin{array}{lll} a=1; & b=7/3; & c=2/3 \\ \log x=1; & \log y=7/3; & \log z=2/3 \\ x=10 & y=10^{7/3} & z=10^{2/3} \end{array}$$

$$\therefore \log_{yz} x = \log_{10^3} 10 = \frac{1}{3}$$

De donde cada sumando debe ser igual a cero.

$$x \log_a 10 - 1 = 0 \Rightarrow x = \log a$$

$$x \log_b 10 - 1 = 0 \Rightarrow x = \log b$$

$$x \log_c 10 - 1 = 0 \Rightarrow x = \log c$$

$$3x = \log a + \log b + \log c$$

$$3x = \log abc$$

$$3x = \log abc$$

$$3x = \log 1000 = 3$$

$$x = 1$$

### Problema 15

Encontrar el máximo valor de  $\lambda$  si:

$$\frac{\log xy \cdot \log xz \cdot \log yz}{\log x \cdot \log y \cdot \log z} \geq \log \lambda$$

donde  $\{x, y, z, \lambda\} \subset \mathbb{R}^+ - \{0; 1\}$

#### Resolución:

Por el capítulo de desigualdades sabemos que

$$(m+n)(m+p)(n+p) \geq 8mnp$$

$$\forall m, n, p \in \mathbb{R}^+$$

Si se hace una analogía en el problema tendremos que  $m = \log x$ ;  $n = \log y$ ;  $p = \log z$  se cumple

$$(\log x + \log y)(\log x + \log z)(\log y + \log z) \geq 8 \log x \log y \log z$$

$$\frac{\log xy + \log xz + \log yz}{\log x \log y \log z} \geq 8$$

$$\text{De aquí: } 8 \geq \log \lambda$$

$$\lambda \leq 10^8$$

$$\therefore \lambda \text{ máximo} = 10^8$$

### Problema 16

Halle el dominio de la función "f" cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \log(\sqrt{e^x - e^{-x}} + \sqrt{2e^{-x} - e^x} + 1)$$

#### Resolución:

I. Analizamos los radicales

$$e^x - e^{-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 2e^{-x} - e^x \geq 0$$

$$e^x \geq e^{-x} \quad 2e^{-x} \geq e^x$$

$$e^{2x} \geq e^0 \quad 2 \geq e^{2x}$$

$$2x \geq 0 \quad e^{\ln 2} \geq e^{2x}$$

$$x \geq 0 \quad \ln 2 \geq 2x$$

$$x \leq \ln \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x \in [0; \ln \sqrt{2}]$$

II. Por definición de logaritmos

$$\underbrace{\sqrt{e^x - e^{-x}}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{2e^{-x} - e^x}}_{\geq 0} + 1 > 0$$

Lo cual siempre se cumple para los valores obtenidos en (I).

$$\therefore \text{Dom}(f) = [0; \ln \sqrt{2}]$$

### Problema 17

Sea la función "g" cuya regla de correspondencia está dada por:

$$g(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Encuentre su función inversa.

#### Resolución:

$$\text{Por } (-1): \begin{cases} y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ -y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} \end{cases}$$

Despejemos la variable "x"

Se utiliza la definición de logaritmos

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = a^y \\ (x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} = a^{-y} \end{cases}$$

Efectuando

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = a^y \\ -x + \sqrt{x^2 + 1} = a^{-y} \end{cases}$$

$$2x = a^y - a^{-y}$$

$$x = \frac{a^y - a^{-y}}{2}$$

Como queremos la función inversa intercambiamos las variables

$$\therefore y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$$

### Problema 18

Resolver la siguiente inecuación

$$\log_6 \left( \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + 35 \right) > 2$$

**Resolución:**

$$I. \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + 35 > 0$$

Esta expresión es siempre positiva

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{5\} \dots\dots\dots (i)$$

$$II. \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + 35 > 6^2$$

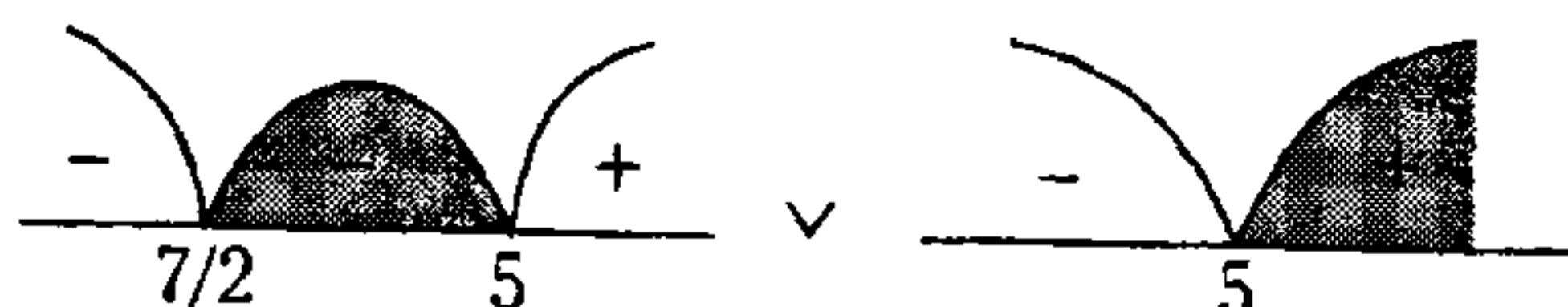
$$\left| \frac{x-2}{x-5} \right| > 1$$

$$\frac{x-2}{x-5} < -1$$

$$\frac{x-2}{x-5} > 1$$

$$\frac{2x-7}{x-5} < 0$$

$$\frac{3}{x-5} > 0$$



$$\Rightarrow x \in \left\langle \frac{7}{2}; 5 \right\rangle \cup \langle 5; 8 \rangle \dots\dots\dots (ii)$$

$$\therefore C.S. = \textcircled{i} \cap \textcircled{ii}$$

$$= \left\langle \frac{7}{2}; 5 \right\rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$$

**Problema 19**

Halle el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones logarítmicas

$$\begin{cases} 2 + \log_{\sqrt{2}} \left( x + \frac{3}{2} \right) < 0 \\ \log x \cdot x^{\frac{1}{\log x}} < 1 \end{cases}$$

**Resolución:**

Debemos resolver cada inecuación y luego intersectar sus soluciones.

a. Veamos la 1ª inecuación

$$x + \frac{3}{2} > 0$$

$$\log_{\sqrt{2}} \left( x + \frac{3}{2} \right) < -2$$

$$x > -3/2$$

$$x + \frac{3}{2} > 2$$

$$\Rightarrow C.S._1 = \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$$

b. Ahora la 2ª inecuación

$$x > 0 \quad \wedge \quad \log x \cdot x^{\log_x 10} < 1$$

$$10 \log x < 1$$

$$x < 10^{\frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow C.S._2 = \langle 0, \sqrt[10]{10} \rangle - \{1\}$$

$$\therefore C.S. = C.S._1 \cap C.S._2 = \left\langle \frac{1}{2}, \sqrt[10]{10} \right\rangle - \{1\}$$

**Problema 20**

Si  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $2^{2^{-x}} = x$

Calcular

$$M = \operatorname{sgn}(x-1) + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

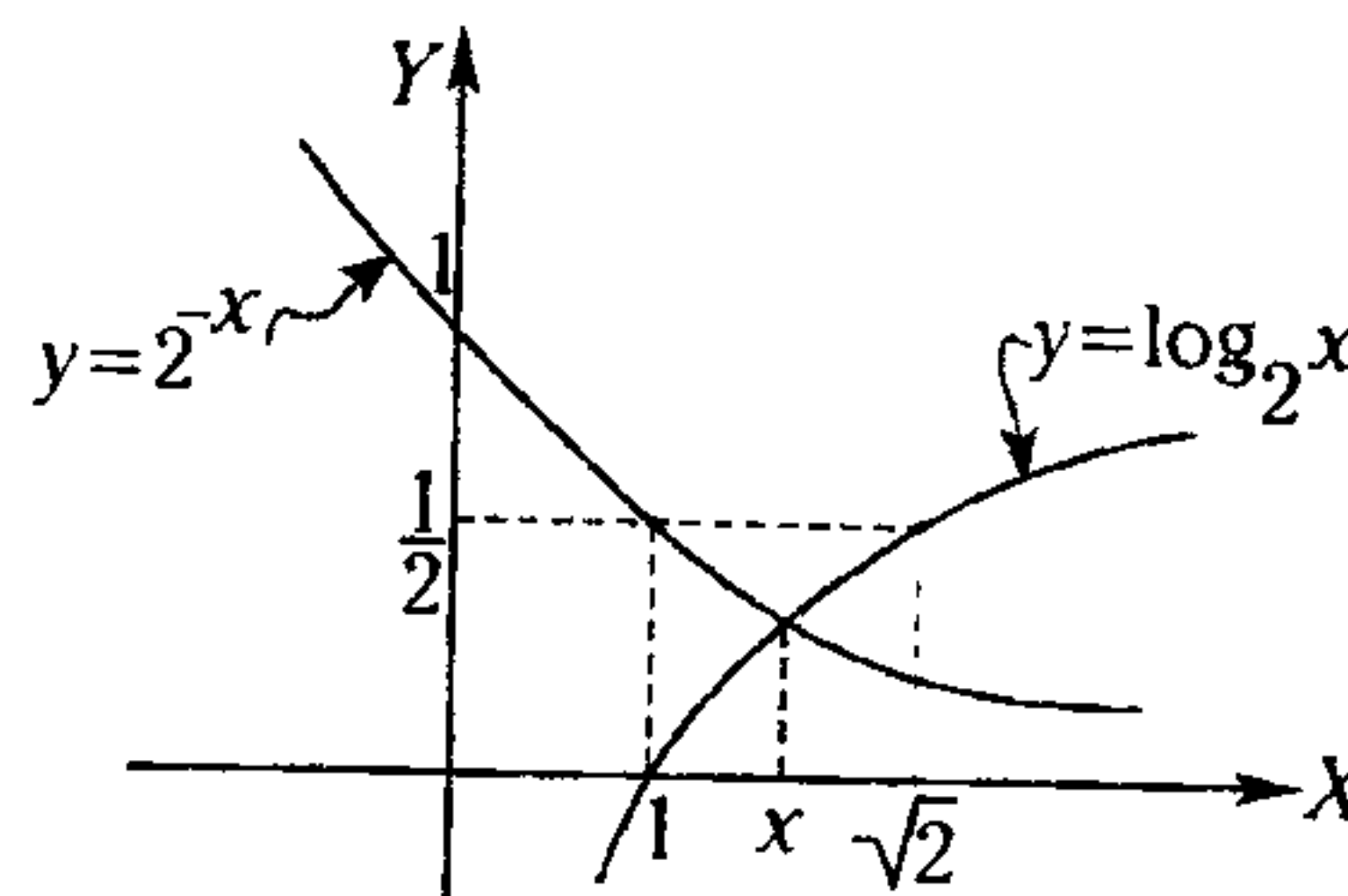
**Resolución:**

En  $2^{2^{-x}} = x$

Tomando logaritmos en base 2

$$2^{-x} = \log_2 x$$

Grafiquemos cada función



Se puede observar que la solución está en el intervalo  $[1; \sqrt{2}]$ , es decir,  $1 < x < \sqrt{2}$



Luego:  $0 < x-1 < \sqrt{2}-1 \rightarrow \text{sgn}(x-1) = 1$

$$\frac{3}{2} < x + \frac{1}{2} < \sqrt{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\therefore N = 1 + 1 = 2$$

### Problema 21

Luego de resolver la inecuación

$$\log^4 x < \sqrt{\log x}$$

Determinar el número de valores enteros menores que 10 que pertenecen a su conjunto solución.

#### Resolución:

I. Los logaritmos existen en  $\mathbb{R}$   
si:  $x > 0$

II.  $\left(\frac{1}{4}\log x\right)^2 < \sqrt{\log x^2}$

Se opera:  $\log x (\log x - 16) < 0$



De aquí

$$0 < \log x < 16 \Leftrightarrow 1 < x < 10^{16}$$

$$\therefore \text{C.S.} = <1; 10^{16}>$$

$\Rightarrow$  El número de valores menores a 10 es 8.

### Problema 22

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. H es inyectiva en  $<-1; 1>$

II. H es creciente en  $<0; 2>$

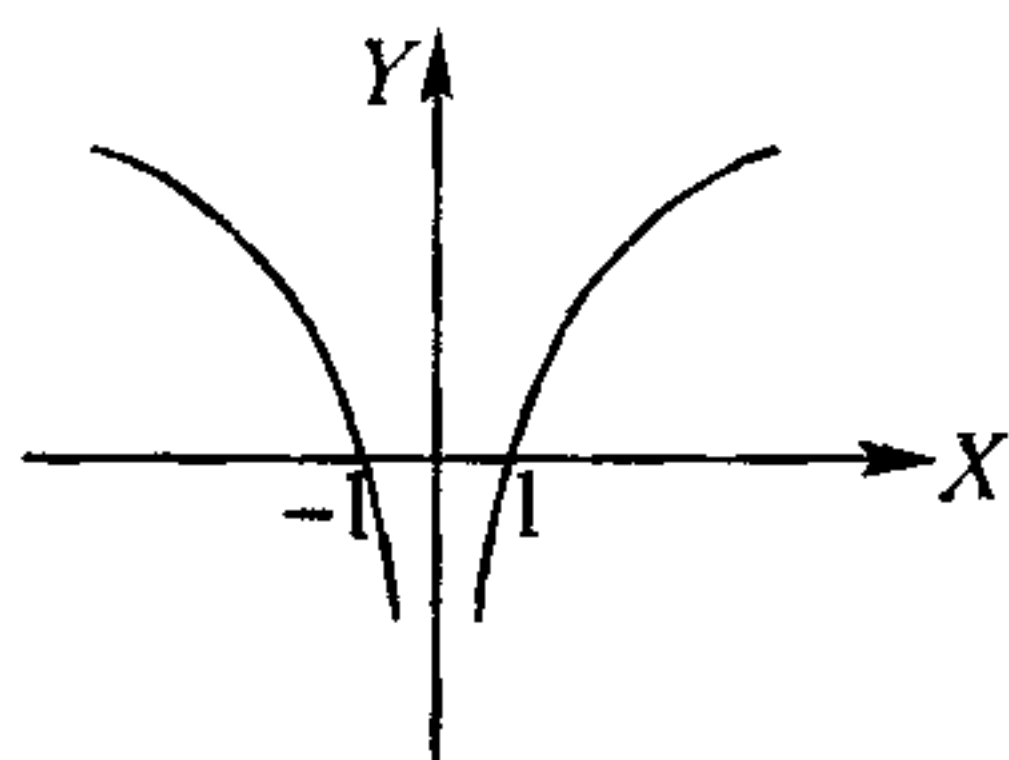
III. H es par

Se sabe que  $H(x) = |\log_2 |x||$

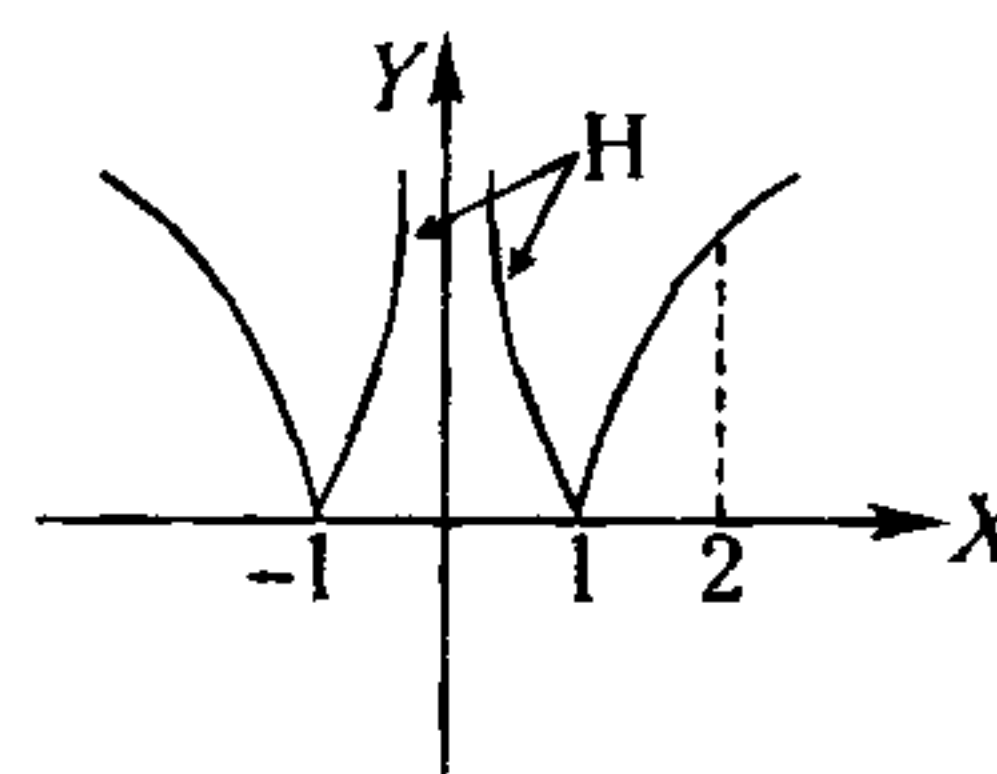
#### Resolución:

Grafiquemos H

- Primero grafiquemos:  $y = \log_2 |x|$



- Grafiquemos su valor absoluto



- En el intervalo  $<-1; 1>$ , la función H no es inyectiva ya que al trazar una recta paralela al eje "X" corta su gráfica en 2 puntos.
- En el intervalo  $<0; 2>$ , la función H es decreciente en  $<0; 1>$  y es creciente en  $<1; 2>$ .
- La función H es par ya que  $H(x) = H(-x)$

Luego, la respuesta es FFV.

### Problema 23

Indicar el número de soluciones reales de la ecuación:

$$\frac{\ln x^2}{2} - \text{sgn} \frac{(x-3)^4(x+1)}{(x-2)} = \sqrt{5-y} + \sqrt{y-5}$$

#### Resolución:

Se analiza la existencia de las raíces:

$$5-y \geq 0 \quad \wedge \quad y-5 \geq 0$$

$$y \leq 5 \quad \wedge \quad y \geq 5$$

$$\Rightarrow y = 5$$

Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\log \sqrt{x^2} - \text{sgn} \frac{(x-3)^4(x+1)}{(x-2)} = 0$$

$$\log |x| = \text{sgn} \frac{(x-3)^4(x+1)}{(x-2)}$$

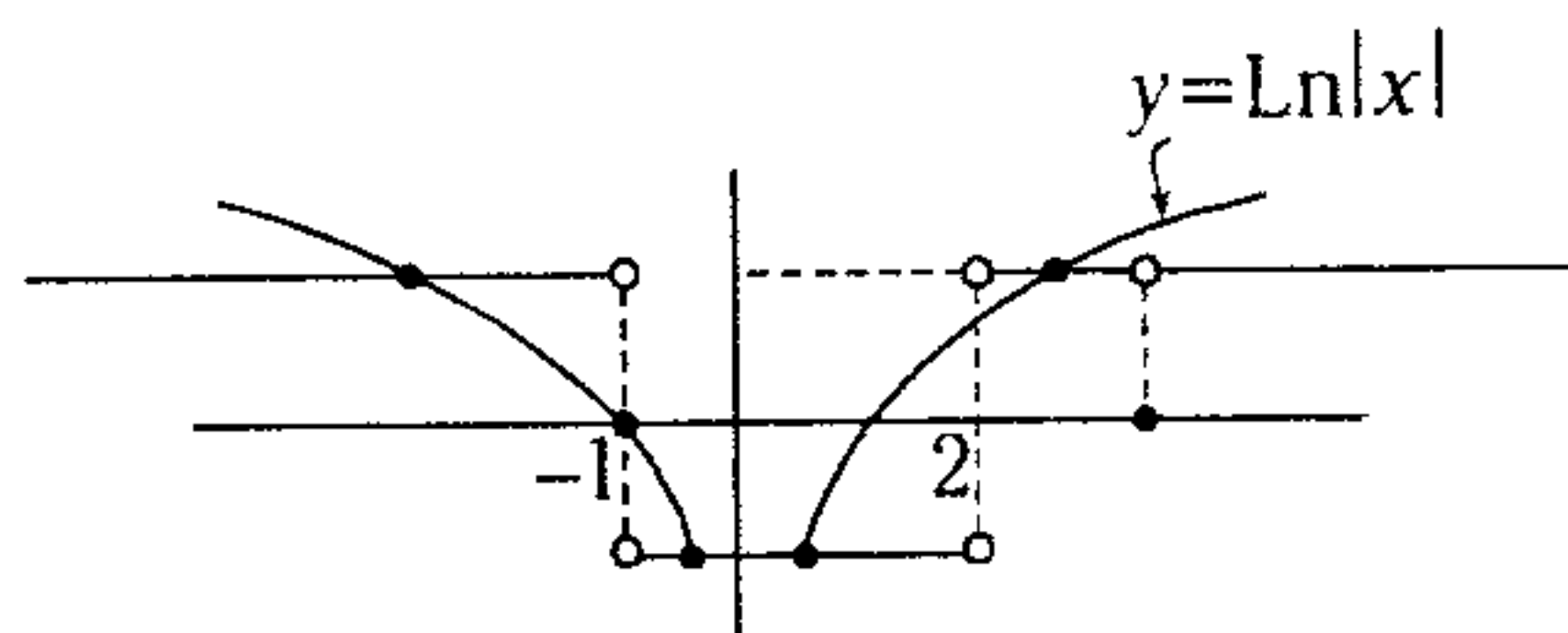
Se analiza la función signo

$$\frac{(x-3)^4(x+1)}{x-2} > 0; \frac{(x-3)^4(x+1)}{x-2} = 0; \frac{(x-3)^4(x+1)}{x-2} < 0$$

$$(x < -1 \vee x > 2) \wedge x \neq 3 \quad x = 3 \vee x = -1 \quad -1 < x < 2$$

Luego:

$$\text{sgn} \frac{(x-3)^4(x+1)}{x-2} \begin{cases} 1 & ; x < -1 \vee x > 2 \wedge x \neq 3 \\ 0 & ; x = 3 \vee x = -1 \\ -1 & ; -1 < x < 2 \end{cases}$$



Existen 5 puntos de intersección entre las gráficas, por lo tanto, existen 4 soluciones.

### Problema 24

Resolver la siguiente inecuación

$$\log_7(1 + \log_2(3x^2 + 3x + 2)) > -\log_3(x^8 + x^2 + 3)$$

y dar como respuesta el complemento de su conjunto solución.

#### Resolución:

Analizando los logaritmos

$$(\bullet) -\log_3(x^8 + x^2 + 3) = \log_3\left(\frac{1}{x^8 + x^2 + 3}\right)$$

Sabemos que  $x^8 + x^2 \geq 0$

$$x^8 + x^2 + 3 \geq 3$$

$$\frac{1}{x^8 + x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Entonces, } \log_3\left(\frac{1}{x^8 + x^2 + 3}\right) < 0$$

$$(\bullet) \log_2(3x^2 + 3x + 1 + 1)$$

Sabemos que  $3x^2 + 3x + 1$  es positivo

$\forall x \in \mathbb{R}$  por teorema del trinomio positivo,

luego,  $3x^2 + 3x + 2 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces,

$$\log_2(3x^2 + 3x + 2) > 0$$

En la ecuación:

$$\underbrace{\log_7\left(\underbrace{1 + \log_2(3x^2 + 3x + 2)}_{> 1}\right)}_{> 0} > \underbrace{-\log_3(x^8 + x^2 + 3)}_{< 0}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \mathbb{R}$$

Su complemento es  $\emptyset$

### Problema 25

Resolver el sistema mixto

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \log_5 9 \leq -\log_5 y^{6x+2} \\ 1 + \log_2 7 \log_7(1 + \log_2 y) = \log_2(2 \log_2 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

y dar como respuesta la suma de los valores enteros que toma  $x$ .

#### Resolución:

En la ecuación

$$1 + \log_2 7 \log_7(1 + \log_2 y) = \log_2 2 + \log_2 \log_2 2\sqrt{3}$$

$$\log_2(1 + \log_2 y) = \log_2 \log_2 2\sqrt{3}$$

$$\underbrace{1 + \log_2 y}_{\log_2 2 + \log_2 \sqrt{3}} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{3}$$

$$\text{Comparando: } y = \sqrt{3}$$

Reemplazando en la inecuación

$$\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \log_5 9 \leq -\log_5 \sqrt{3}^{6x+2}$$

$$\log_5 (3^2)^{\frac{x^2+1}{2}} \leq \log_5 \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-(6x+2)}$$

Como la base es mayor que uno, entonces:

$$3^{x^2+1} \leq 3^{-3x-1}$$

$$x^2 + 1 \leq -3x - 1$$

$$x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

$$(x + 2)(x + 1) \leq 0$$

$$x \in [-2; -1]$$

La suma de valores enteros de  $x$  es  $-3$ .

### Problema 26

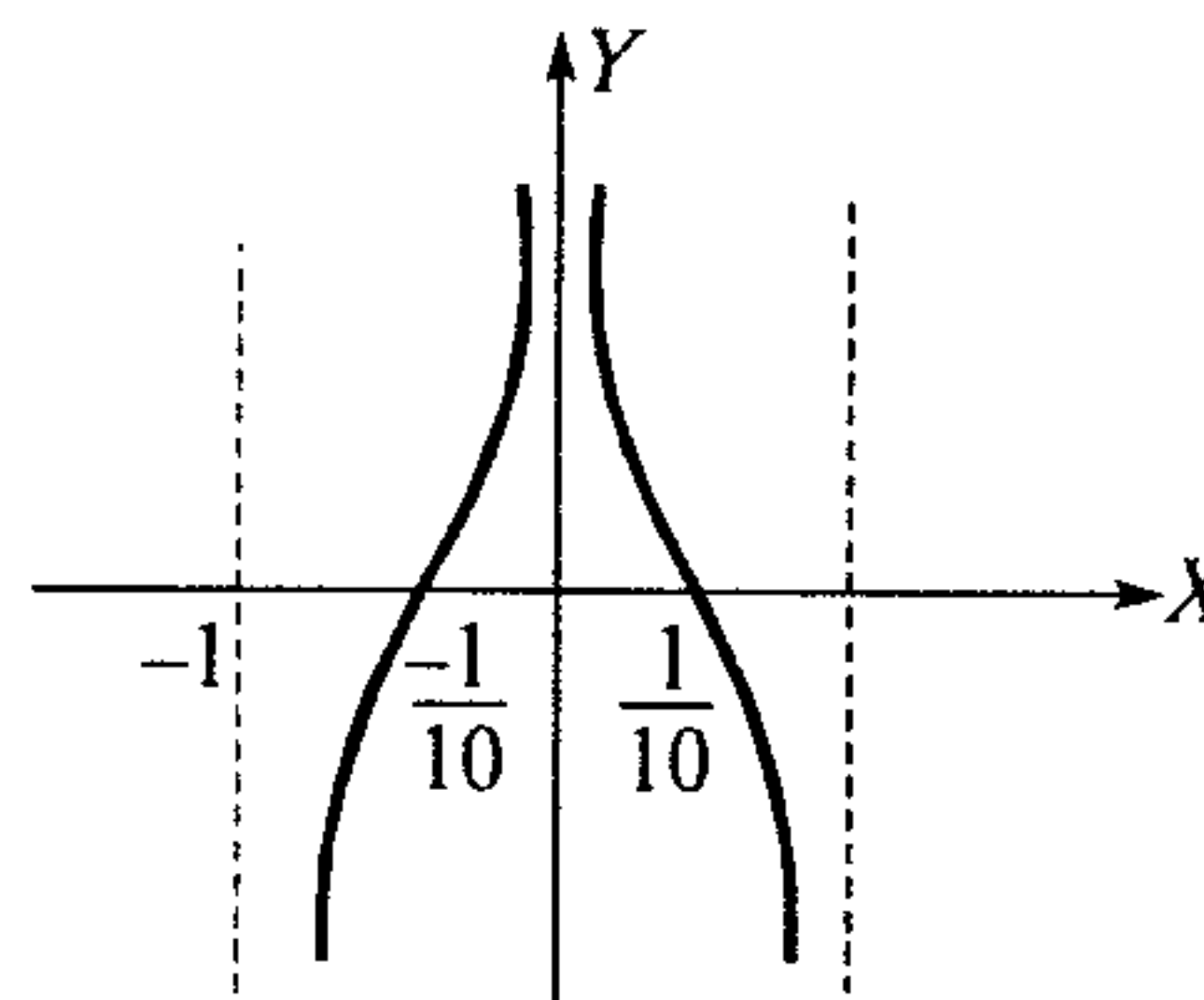
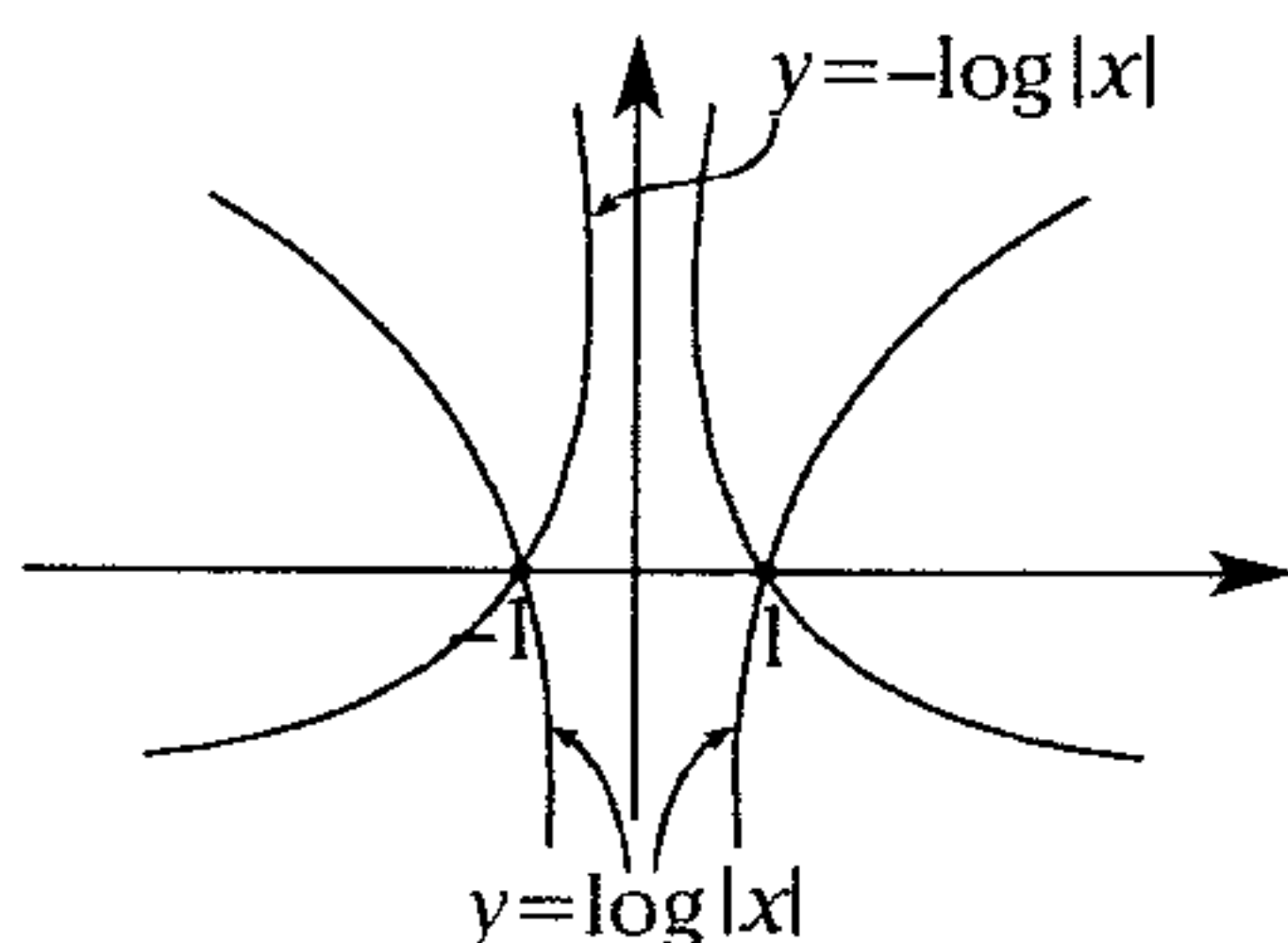
Graficar la función

$$f(x) = \log(-\log|x|)$$

e indicar una de sus asíntotas.

**Resolución:**

Graficando

Entonces, la gráfica de  $f$  es:

Veamos qué intervalo es el dominio de la función  $f(x)$ .

$$f(x) = \log(-\log|x|)$$

$$-\log|x| > 0$$

$$\log|x| < 0$$

$$|x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Las asíntotas de la gráfica son:

$$x = -1$$

$$x = 1$$

$$x = 0$$

**Problema 27**Calcular el máximo valor de  $K$  si se cumple

$$\left( \log_{(b-3)}(ab-3a-b+3) + \log_{(c-7)}(bc-7b-3c+21) + \log_{(d-9)}(cd-9c-7d+63) + \log_{(a-1)}(ad-d-9a+9) \right)^2 \geq K$$

Además:  $a > b > c > d > 10$ **Resolución:**

Al operar tenemos

$$\left[ \log_{(b-3)}(b-3)(a-1) + \log_{(c-7)}(b-3)(c-7) + \log_{(d-9)}(c-7)(d-9) + \log_{(a-1)}(a-1)(d-9) \right]^2 \geq K$$

Aplicando propiedad de producto a suma

$$\left[ 1 + \log_{(b-3)}(a-1) + 1 + \log_{(c-7)}(b-3) + 1 + \log_{(d-9)}(c-7) + 1 + \log_{(a-1)}(d-9) \right]^2 \geq K$$

Sabemos, además, que  $MA \geq MG$ 

$$\frac{\log_{(b-3)}(a-1) + \log_{(c-7)}(b-3) + \log_{(d-9)}(c-7) + \log_{(a-1)}(d-9)}{4} \geq \sqrt[4]{\log_{(b-3)}(a-1) \log_{(c-7)}(b-3) \log_{(d-9)}(c-7) \log_{(a-1)}(d-9)}$$

1

Utilizando este resultado

$$\left( \underbrace{4 + \log_{(b-3)}(a-1) + \log_{(c-7)}(b-3) + \log_{(d-9)}(c-7) + \log_{(a-1)}(d-9)}_{\geq 4} \right)^2 \geq 64 \geq K$$

 $\therefore$  El máximo valor de  $K$  es 64.



**Problema 29**

Si se cumple

$$\log_{2x}(3x-1) = \log_y(2y-3)$$

Halle el producto de valores de  $x$ , más el producto de valores de  $y$ .**Resolución:**

Se analiza todos los casos posibles para que se cumpla la igualdad:

$$1^\circ \text{ caso: } \begin{cases} 3x-1=1 \\ 2y-3=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2/3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ caso: } \begin{cases} 2x=y \\ 3x-1=2y-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$3^\circ \text{ caso: } \begin{cases} 2x=3x-1 \\ y=2y-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Lo que nos piden será igual a  $\frac{76}{3}$ **Problema 30**

$$\log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}(b^2-2b+2) + \log_{|p|+4}(a^2-2ac+c^2+1)=0$$

Y, además,  $A=\{a; b; c; a+b\}$ Halle  $n(A)$ .**Resolución:**

Completando cuadrados

$$\log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}((b-1)^2+1) + \log_{|p|+4}((a-c)^2+1)=0$$

En la ecuación, se observa que la base de los logaritmos es mayor que uno y los números de los logaritmos son mayores o iguales a uno. Para que la suma sea cero cada uno de estos números debe ser igual a uno, entonces:

$$a^2+1=1 \Rightarrow a=0$$

$$(b-1)^2+1=1 \Rightarrow b=1$$

$$(a-c)^2+1=1 \Rightarrow a=c=0$$

Luego,  $A=\{0; 1\}$  $\therefore$  El cardinal de  $A(n(A))$  es 2.**Problema 31**

$$\text{Si } \frac{\log_p n + n}{m^3} = \frac{\log_p m - n}{n^3} = \frac{3}{m^4 + n^4}$$

Calcular el valor de:

$$\log_{p^5}(n^m \cdot m^n) + \log_{(n^m \cdot m^n)} p^5$$

**Resolución:**

Hallemos un equivalente a la igualdad anterior

$$\frac{m(\log_p n + n)}{m^4} = \frac{n(\log_p m - n)}{n^4} = \frac{3}{m^4 + n^4}$$

$$\text{por propiedad de proporciones } \frac{\log_p n^m + \cancel{mn} + \log_p m^n - \cancel{nn}}{\cancel{m^4} + \cancel{n^4}} = \frac{3}{\cancel{m^4 + n^4}}$$

$$\begin{aligned} \log_p(n^m \cdot m^n) &= 3 \\ n^m \cdot m^n &= p^3 \end{aligned}$$

Reemplazando en lo que nos piden:

$$\begin{aligned} \log_{p^5}(n^m \cdot m^n) + \log_{(n^m \cdot m^n)} p^5 \\ = \log_{p^5} p^3 + \log_{p^3} p^5 = \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15} \end{aligned}$$

**Problema 32**

Dados los conjuntos:

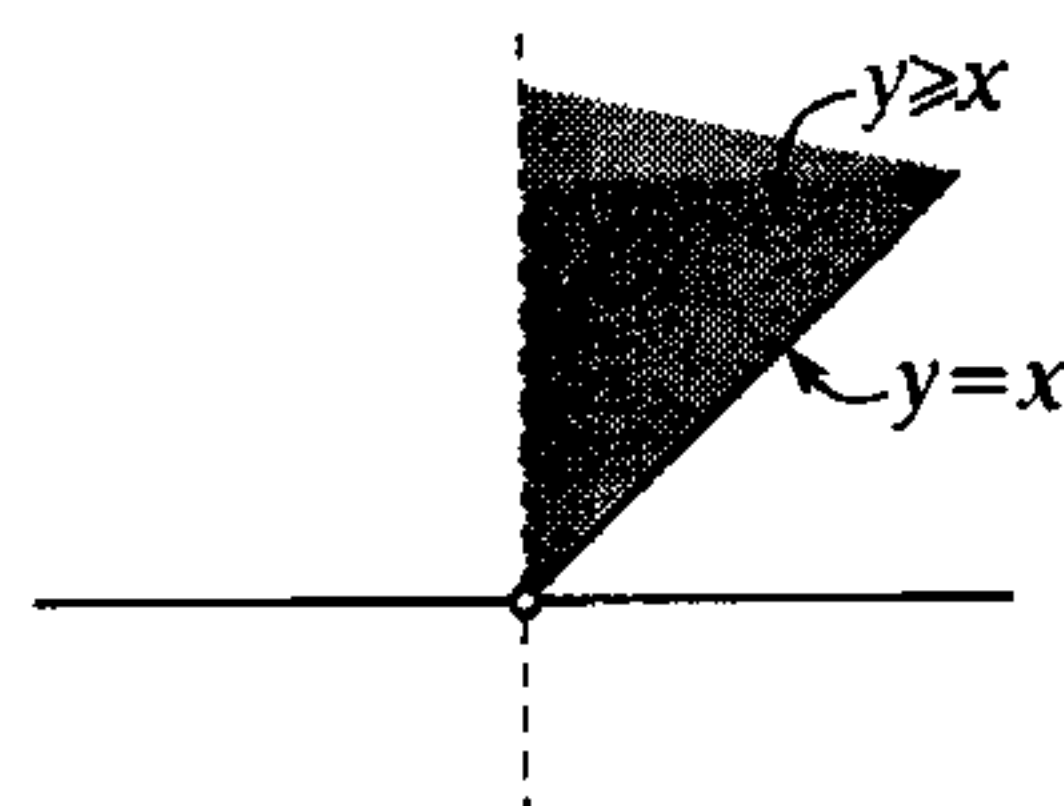
$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq (x+1) \log_{(x+1)} x\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 1 + \log(x+2)\}$$

Esbozar la gráfica formada por  $A \cap B$ .**Resolución:**

Grafiquemos el conjunto A

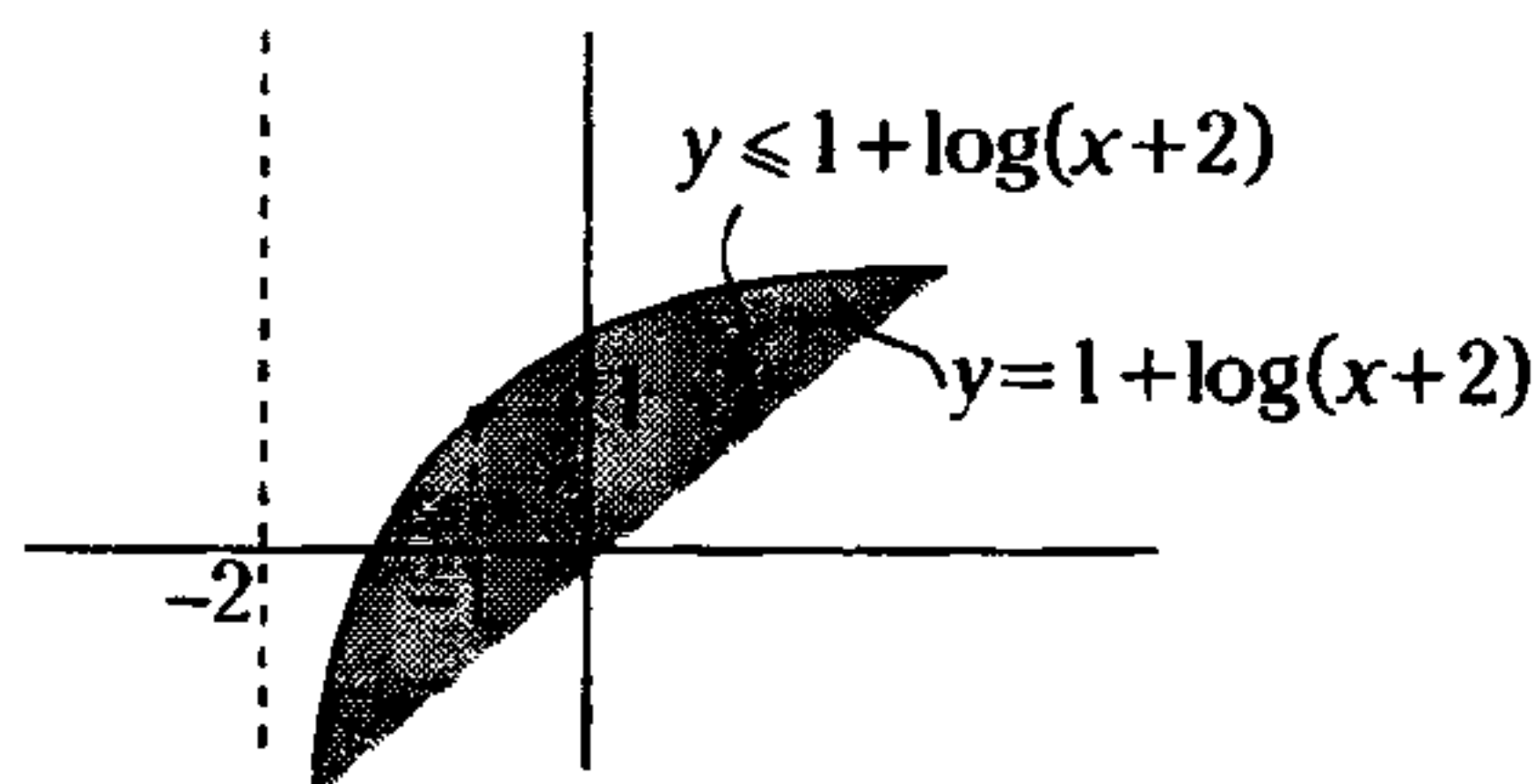
$$y \geq (x+1) \log_{(x+1)} x = x \rightarrow y \geq x$$

Pero  $x+1 > 0 \wedge x > 0 \rightarrow x > 0$ 

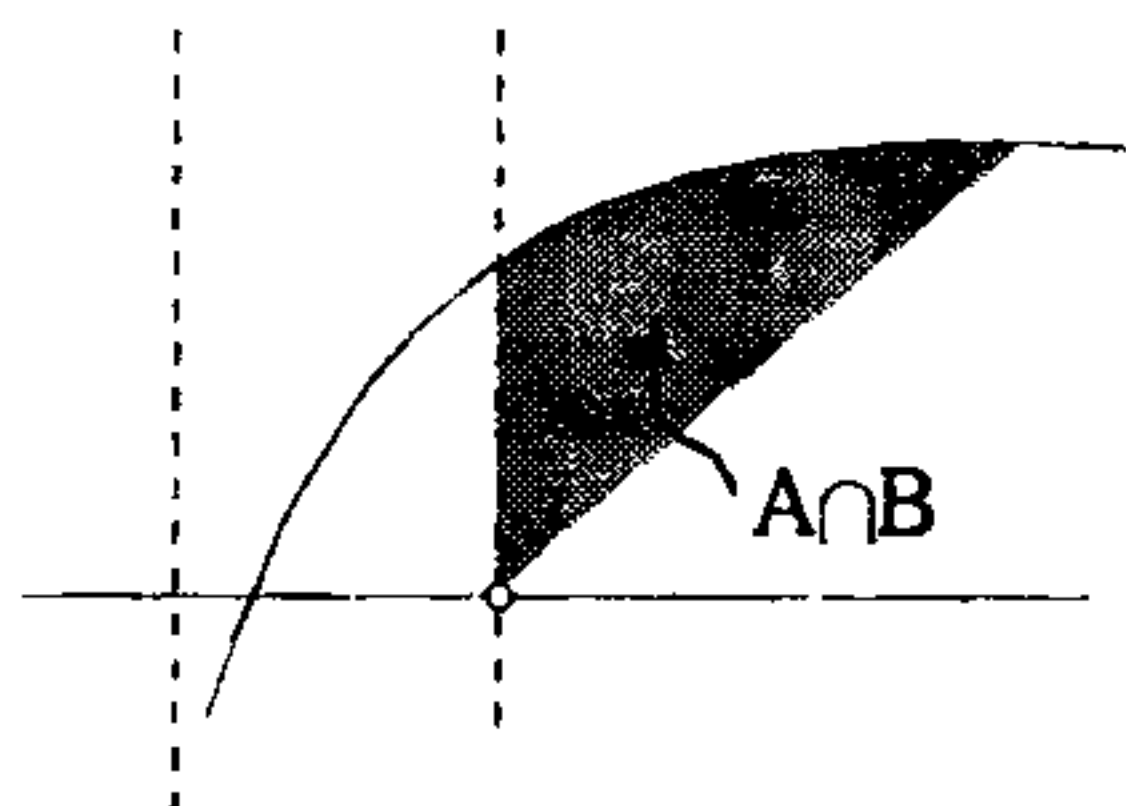
Ahora grafiquemos B

$$y \leq 1 + \log(x+2)$$

Por traslación de la gráfica



Por lo tanto, la gráfica de  $A \cap B$  será



### Problema 33

Demostrar que:

$$\log\left(\frac{n}{n-1}\right)e < n < \log\left(\frac{n+1}{n}\right)e$$

Donde  $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

**Resolución:**

Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  entonces:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \text{Lne} < \text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$n \text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$n < \frac{1}{\text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} < n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < \text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \text{Ln}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \text{Ln}\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$\text{Log}_{\left(\frac{n}{n-1}\right)}e < n < \text{Log}_{\left(\frac{n+1}{n}\right)}e$$

### Problema 34

Siendo  $n$  una solución de la ecuación  $f(x)=2$ ;

$$\text{donde } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } f(x) = \frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})}$$

Resuelva para  $z$  la ecuación:

$$n^{zn^z} = \frac{1}{\sqrt{2}}; z \in \mathbb{R}$$

**Resolución:**

Por dato:

$$\frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})} = 2$$

$$\log_2(2x-8) = \log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})^2$$

$$2x-8 = (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})^2$$

Operando:

$$(x-6)(x+4) = 0$$

$$x=6 \vee x=-4$$

Estos valores de la variable deben constatarse con el dominio de  $f(x)$ .

Si  $x=-4$  entonces  $f(x)$  no existe.

El único valor que puede tomar  $x=6$

Luego,  $x=6$

$$(6^z)^{6^z} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 6^z = \frac{1}{2}$$

$$z = \log_6\left(\frac{1}{2}\right)$$

**Problema 35**

Halle el valor de "n"

$$\text{Si: } \prod_{k=1}^n \log^k 2 = [\log^3 2]^{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}}$$

**Resolución:**

$$\log 2 \cdot \log^2 2 \dots \log^n 2 = [\log^3 2]^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots}$$

$$(\log 2)^{1+2+\dots+n} = (\log^3 2)^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$(\log 2)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (\log 2)^6$$

Igualando los exponentes  
n=3

**Problema 36**

Halle el menor valor entero de "λ" que verifique:

$$\left( \lambda - \left( \frac{1}{\pi} \right)^{|x|} \right) (3^x + 1) \geq 3^{x+1} + 3$$

**Resolución:**

$$\left( \lambda - \left( \frac{1}{\pi} \right)^{|x|} \right) (3^x + 1) \geq 3(3^x + 1)$$

$$\lambda - \left( \frac{1}{\pi} \right)^{|x|} \geq 3$$

$$\lambda - 3 \geq \left( \frac{1}{\pi} \right)^{|x|}$$

Sabemos que:

$$0 < \left( \frac{1}{\pi} \right)^{|x|} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego, el menor valor de  $\lambda \in \mathbb{Z}^+$  que verifique la condición dada será cuando:

$$\lambda - 3 = 1$$

$$\therefore \lambda = 4$$

**Problema 37**

$$\text{Si } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\text{En } f(x) = \frac{x^2}{x - \log(x+1)} \text{ halle la expansión de } f(x),$$

luego evalúe f(0) de los 3 primeros términos.

**Resolución:**

$$f(x) = \frac{x^2}{x - \log(1+x)} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \dots}$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \dots}$$

Asumimos f(x) de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Luego se tiene:

$$1 = \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \dots \right) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

Se multiplican los términos

$$1 = \frac{a_0}{2} - \left( \frac{a_0}{3} - \frac{a_1}{2} \right) x + \left( \frac{a_0}{4} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{2} \right) x^2 + \dots$$

Identificando los términos

$$a_0 = 2 \wedge a_1 = \frac{4}{3} \wedge a_2 = -\frac{1}{9}$$

$$f(x) = 2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots$$

$$\therefore f(0) = 2$$

**Problema 38**

Dada la siguiente inecuación logarítmica

$$\frac{(\log_{|x|+2}(|x^2-a|+x^2)) - \log_{|x|+2}|x-\sqrt{a}| - \log_{|x|+2}|x+\sqrt{a}| + x^2+1)}{(x+1)(x^2+|x|-2)} \leq 0$$

cuyo conjunto solución es  $\langle -\infty; a \rangle - \{-\sqrt{b}\}$ .

Si  $A = \{a; b; ab+2\}$  dar  $\sup(A) + \inf(A)$



**Resolución:**

Se observa que la base de los logaritmos es  $|x| + 2 > 1$ , además:

$$\begin{aligned} & \left| \log_{|x|+2}(x^2 - a) + x^2 \right| \geq \log_{|x|+2}(x^2 - a) + x^2 \\ & \geq \log_{|x|+2}(x^2 - a) = \log_{|x|+2}(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) \\ & = \log_{|x|+2}(x - \sqrt{a}) + \log_{|x|+2}(x + \sqrt{a}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el numerador es un número positivo y podemos simplificarlo obteniendo

$$\frac{1}{(x+1)(|x|-1)(|x|+2)} \leq 0$$

$$\text{Si } x \geq 0 \rightarrow \frac{1}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$\rightarrow x \in [0, 1)$$

$$\text{Si } x < 0 \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\rightarrow x \in (-\infty; 0) - \{-1\}$$

Luego: C.S. =  $(-\infty; 1) - \{-1\}$

Del dato:  $a=1$  ;  $b=1$

$$A = \{1; 3\}$$

$$\therefore \text{Sup}(A) + \text{Inf}(A) = 3 + 1 = 4$$

**Problema 39**

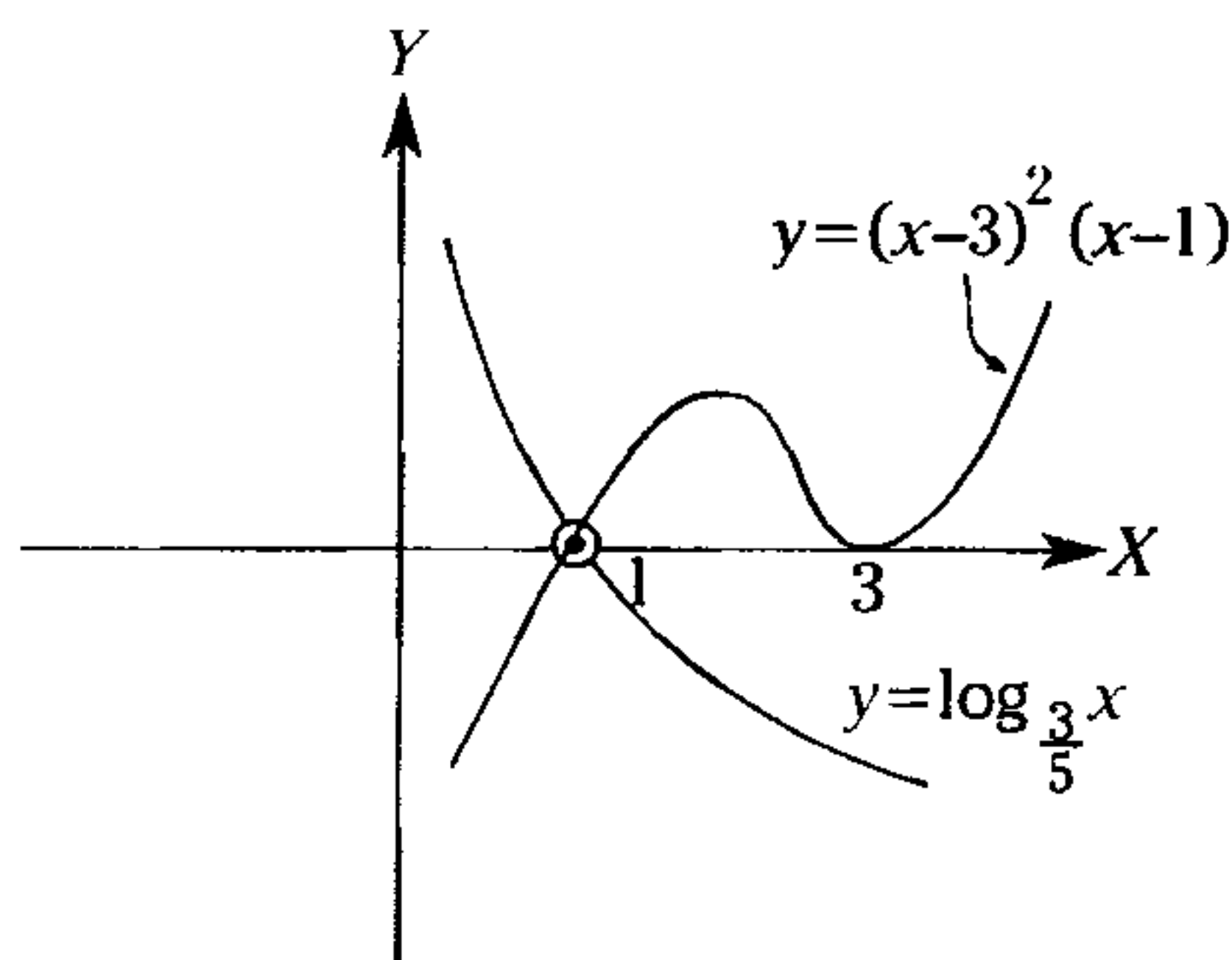
Dar la cantidad de soluciones reales en:

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 9 = \frac{1}{\log_x \frac{3}{5}}$$

**Resolución:**

Al operar obtenemos:

$$(x-3)^2(x-1) = \log_{\frac{3}{5}} x ; \begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix}$$



Del gráfico C.S. =  $\emptyset$ , es decir, no hay ninguna solución real ya que no existe intersección entre las gráficas de funciones reales de variables reales.

**Problema 40**

Demostrar que  $e^\pi > \pi^e$

**Demostración:**

Sea  $f(x) = \frac{\text{Ln} x}{x}$  ;  $x > 0$

Veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

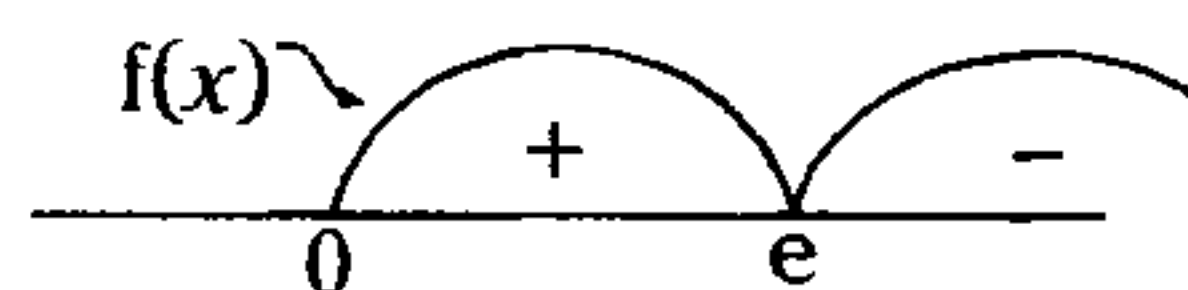
$$f'(x) = \frac{1 - \text{Ln} x}{x^2}$$

Entonces,  $f'(x) = 0$

$$\frac{1 - \text{Ln} x}{x^2} = 0$$

$$\text{Ln} x = 1$$

$$x = e$$



Se observa que  $f'(x)$  es decreciente en  $[e; +\infty)$ .

Entonces:

$$\text{Como } e < \pi, \text{ entonces } \frac{\text{Lne}}{e} > \frac{\text{Ln} \pi}{\pi}$$

$$\pi \text{Lne} > e \text{Ln} \pi$$

$$\text{Lne}^\pi > \text{Ln} \pi^e$$

$$\therefore e^\pi > \pi^e$$

# Problemas Propuestos

1. Si  $\log_2 y = 3$  y  $\log_8 \left( \frac{x^2 y^5}{2} \right) = 6$

Halle:  $\frac{|x|}{y}$

- A) 1                      B)  $\frac{1}{2}$                       C)  $\frac{1}{4}$   
D)  $\frac{1}{8}$                       E)  $\frac{1}{16}$

2. Reducir la siguiente expresión:

$$\frac{2 \cdot 5^{\log_x a} + \log_{\sqrt{3}} 3}{1 + a^{\log_x 5}}$$

Si  $x > a > \sqrt{3}$

- A) 2                      B) 4                      C) 6  
D) 8                      E) 10

3. Calcular  $\log_2 x$ , si:

$$\log_a 64 \cdot \log_x a = \log_b c \log_x b \log_c x^6$$

Si:  $1 < ab < c$

- A) -2                      B) -1                      C) 0  
D) 1                      E) 2

4. Indicar el mayor valor de M si:

$$\log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a \geq M$$

Además:  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      E) 6

5. Resolver la inecuación

$$\log_x \left( \frac{4x+5}{6-5x} \right) < -1$$

e indicar su conjunto solución:

- A)  $f$                       B)  $\left\langle 0; \frac{6}{5} \right\rangle$                       C)  $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right]$   
D)  $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$                       E)  $\left[ 0; \frac{6}{5} \right]$

6. Halle:  $\frac{m}{n}$  si:

$$\log_3 n = \log_6 m = \log_{12} (m+n)$$

- A)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$                       B)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$                       C)  $\sqrt{5}$   
D)  $1-\sqrt{5}$                       E)  $1+\sqrt{5}$

7. Dada la ecuación:

$$\log_3 (3^x - 1) \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$$

determinar la suma de sus raíces.

- A)  $\log 280$                       B)  $\log_3 280$   
C) -2  
D)  $\log_3 280 - 3$                       E) 0

8. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \log_x e > \log_x \pi \\ 1000 \sqrt[3]{0,1} \geq 10^{2x} \end{cases}$$

e indique el número de elementos de su conjunto solución.

- A) 2                      B) 0                      C) 4  
D) 1                      E) infinitos

9. Si

$$\log_{ab} \left[ \log_{ab} \frac{\sqrt{a}}{a} + \frac{1}{2} \log_{ab} b \right] = \log_{ab}^2 a - \log_{ab}^2 b$$

Halle  $\frac{a}{b}$ ; si  $a \neq b$

A)  $\frac{1}{2}$

B)  $\frac{1}{4}$

C) 1

D)  $\frac{1}{6}$

E) 3

10. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I.  $\log_{(x-3)} 2 + \log_2(x-3) \geq 2 ; \forall x \in <3;4>$

II.  $\log_{\log_4 3} 6 < 0$

III.  $\log_3 5 > \log_4 5$

A) FVF

B) FVV

C) VVV

D) VFF

E) VFV

11. Cuántas soluciones reales posee la ecuación:

$$\log|x| + x^2 + 4 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$$

A) 2

B) 4

C) 6

D) 0

E) 1

12. ¿Para qué valores de "a" la ecuación:

$$\log(x^2 + 2ax) - \log(8x - 6a - 3) = 0$$

ofrecerá solución real única?

A) -2

B) -1

C) 1

D) 2

E) 3

13. Si  $(x_0, y_0)$  es una solución del sistema:

$$\begin{cases} \log\left(\frac{y^2+6}{x^2+1}\right) = 2\log\sqrt{\frac{y}{x-1}} \\ \log\left(\frac{x^2+6}{y^2+1}\right) = 2\log\sqrt{\frac{x}{y-1}} \end{cases}$$

Hallar  $x_0 + y_0$

A) 8

B) 7

C) 10

D) 12

E) 5

14. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, sabiendo que:

$$a; b; M \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

I.  $a^{\log_b M - \log_b a} = M$

II.  $a^{\log_b M \cdot \log_b a} = M^{\log_b^2 a}$

III.  $\log_a \log_a x = \log_a \log_b x - \log_a \log_b a$

A) VVF

B) VFF

C) VVV

D) FVF

E) VFV

15. Hallar el producto de soluciones al resolver:

$$6 + 5\log_2 z = \frac{1}{\log_z^2 2}$$

A) 4

B) 16

C) 32

D) 8

E) 64

16. Si  $a, b, c \in <1; +\infty>$  halle el mínimo valor de:

$$\frac{\log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a}{\sqrt[3]{abc}}$$

A) 2

B) 6

C) 10

D) 14

E) 18

17. Dar el valor de verdad en las proposiciones siguientes:

I.  $\log_2 x < \log_3 x \quad \forall x > 1$

II.  $f(x) = e^{-x} - x$  tiene una solución en  $<0;1>$

III. Si  $\log a^n = \log^n a \Leftrightarrow a = 10^{\sqrt[n]{a}}; a > 0$

A) FVF

B) FFF

C) VVV

D) FVV

E) VVF

18. Hallar el valor de "x" en:

$$\frac{\log \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\log \sqrt[3]{x^3 - 1}} = \frac{3}{2}$$

A)  $-\sqrt{2}$

B)  $\sqrt{2}$

C)  $\sqrt{3}$

D)  $-\sqrt{3}$

E) 2



19. Calcular la derivada de:

$$y = \log_2 x \ln 2x$$

en el punto  $x=1$

- A) 2                      B) 3                      C) -1  
D) 1                      E) 0

20. Si se sabe que:

$$\frac{2}{\log_n m} + \frac{3}{\log_q p} = \frac{6}{\log_s r} \quad y$$

$$2^{\log_n m^3} = 3^{\log_q p^2} = x^{\log_s r} \quad \text{con}$$

$m, n, p, q, r, s \in <1; +\infty>$ , determine el valor de "x".

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      E) 6

21. A partir de la ecuación:

$$\ln x^2 + x^2 + 9 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$$

Dar el valor de verdad de las proposiciones:

- I. La suma de soluciones es cero.  
II. La mayor solución es mayor a 3.  
III. Tiene una solución  $x_0$  tal que  $x_0 \in <0;1>$ .

- A) VVV                      B) VFF                      C) VVF  
D) FVV                      E) FVF

22. Luego de resolver la ecuación:

$$\log_{\sqrt{x-7}} \sqrt{x^2+x} = 2$$

dar el número de soluciones.

- A) 1                      B) 2                      C) 0  
D) 3                      E) 4

23. Resolver:

$$(0,1)^{\log x} = 10^{\log^2 x}$$

e indicar el producto de soluciones.

- A) 0,1                      B) 0,2                      C) 0,3  
D) 0,4                      E) 0,5

24. Halle
- $\log_{64} x^2$
- , luego de resolver la siguiente ecuación:

$$\log_x(5-x) + \frac{1}{\log_{x+2} x} = \log_x 6$$

- A) 0                      B)  $\frac{2}{3}$                       C)  $\frac{1}{2}$   
D)  $\frac{1}{4}$                       E)  $\frac{1}{3}$

25. En el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt[m]{y}} \sqrt[m]{x^3} - \log_x y^6 = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Determine el mayor valor de "xy"

- A) 100                      B) 1                      C) 1000  
D) 10                      E)  $\frac{1}{10}$

26. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 11^-} \frac{x^2 \log \lfloor x \rfloor - 100}{x - 10}$$

- A) 0                      B) 11                      C) 20  
D) 21                      E) 1

27. Halle el campo de definición de f si:

$$f(x) = \frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_3(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})}$$

- A)  $[5; +\infty>$   
B)  $[5; +\infty> - \left\{ \frac{69}{4} \right\}$   
C)  $\mathbb{R}$   
D)  $\emptyset$   
E) sólo  $\{x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 5\}$

28. Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^{\ln y} = e^{-3} \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 10 \end{cases}$$

Se obtiene el siguiente conjunto solución:

$$C.S. \{(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots (x_k; y_k)\}$$

$$\text{Calcule: } \prod_{i=1}^k (\ln e^{x_i} \cdot \ln e^{y_i})$$

- A) 3                      B)  $3^2$                       C)  $3^3$   
D) 0                      E) 1

29. El número  $2^8 + 2^{11} + 2^x$  es un cuadrado perfecto y  $x < 15$ . Calcular:

$$\log \left( \frac{x^2 - 44}{x - 2} \right)$$

- A) 5                      B) 10                      C) 2  
D) 1                      E) 0

30. Al resolver la siguiente inecuación:

$$2^{b^x} > 1; b > 0 \wedge b \neq 1$$

indique su conjunto solución.

- A)  $\emptyset$                       B)  $\{1\}$                       C)  $\mathbb{R}$   
D) 1                      E)  $\{0\}$

31. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \log_b x + \log_a y \leq \log_b a^n + \frac{1}{1+c^{-1}} \\ (\log_a b)(\log_a x) + (\log_b a)(\log_b y) \leq \log_a b^n - \frac{1}{1+c} \end{cases}$$

Siendo  $(x_0; y_0)$  una solución particular del sistema, calcular:

$$\operatorname{sgn} \left[ \log_a \left( \frac{x_0}{a^{\frac{n}{2}}} \right) + \log_b \left( \frac{y_0}{b^{\frac{n}{2}}} \right) - 1 \right]$$

- A) 0                      B) 1                      C) -1  
D)  $\operatorname{sgn} 2$                       E)  $\operatorname{sgn} 0$

32. Si:  $\frac{\log_p n + n}{m^3} = \frac{\log_p m - m}{n^3} = \frac{3}{m^4 + n^4}$

Calcular el valor de:

$$\log_{\sqrt[p]{p}}(n^m m^n) + \log_{n^m \cdot m^n} p^5$$

- A)  $\frac{1}{5}$                       B)  $\frac{34}{15}$                       C)  $-\frac{1}{15}$   
D)  $-\frac{34}{15}$                       E)  $\frac{32}{3}$

33. Si:

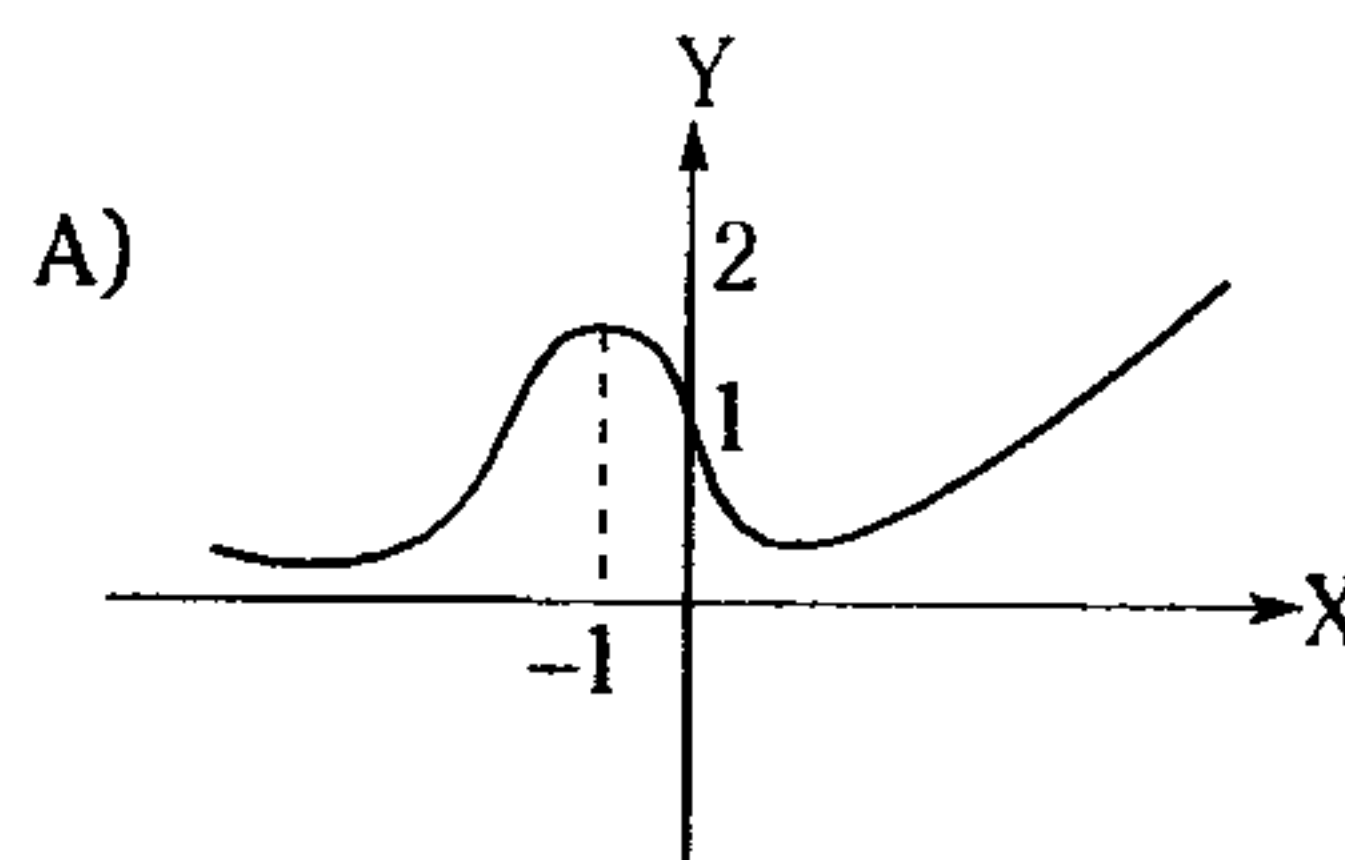
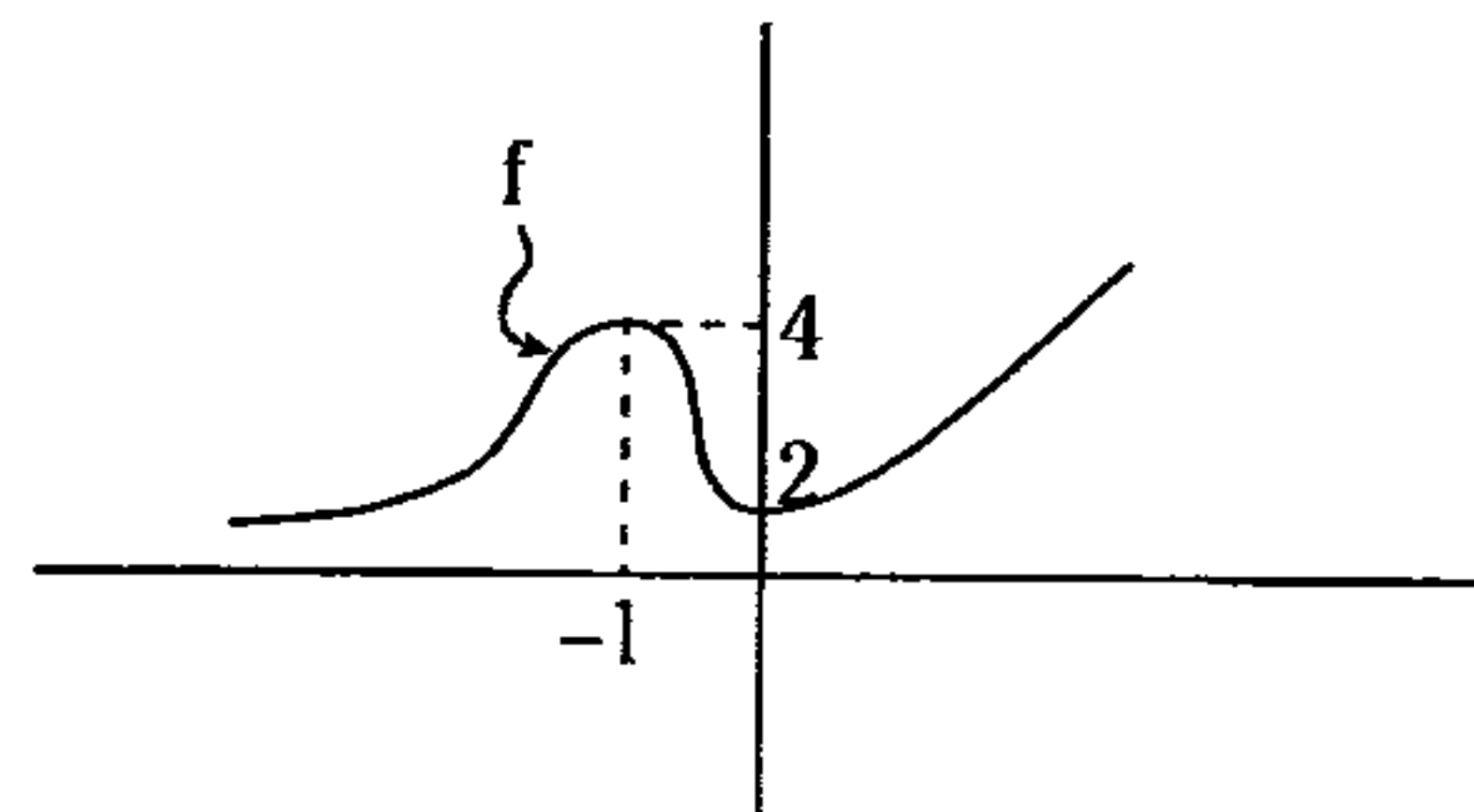
$$\begin{aligned} \log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}(b^2+2b+2) \\ + \log_{|p|+4}(a^2+2ac+c^2+1) = 0 \end{aligned}$$

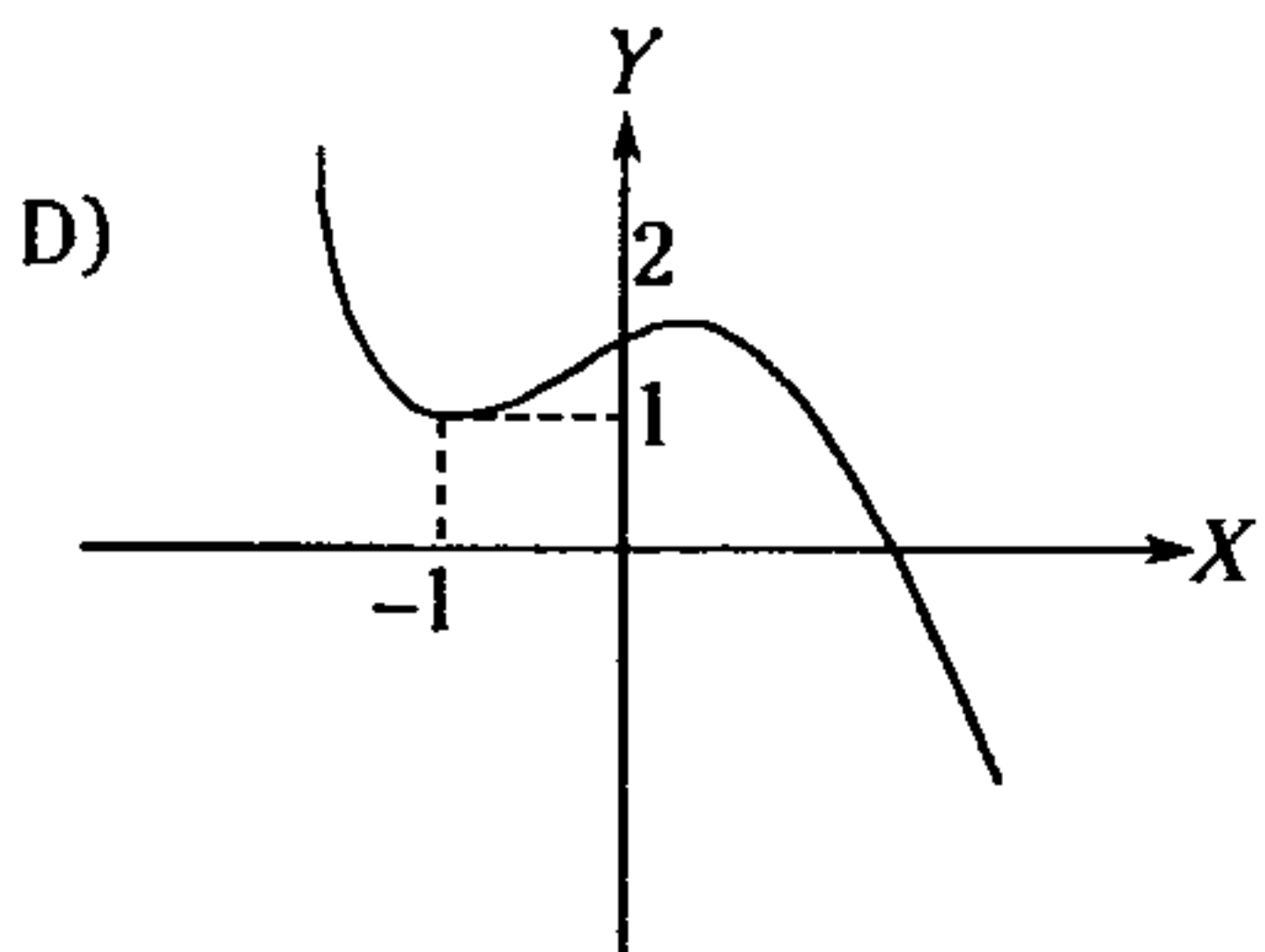
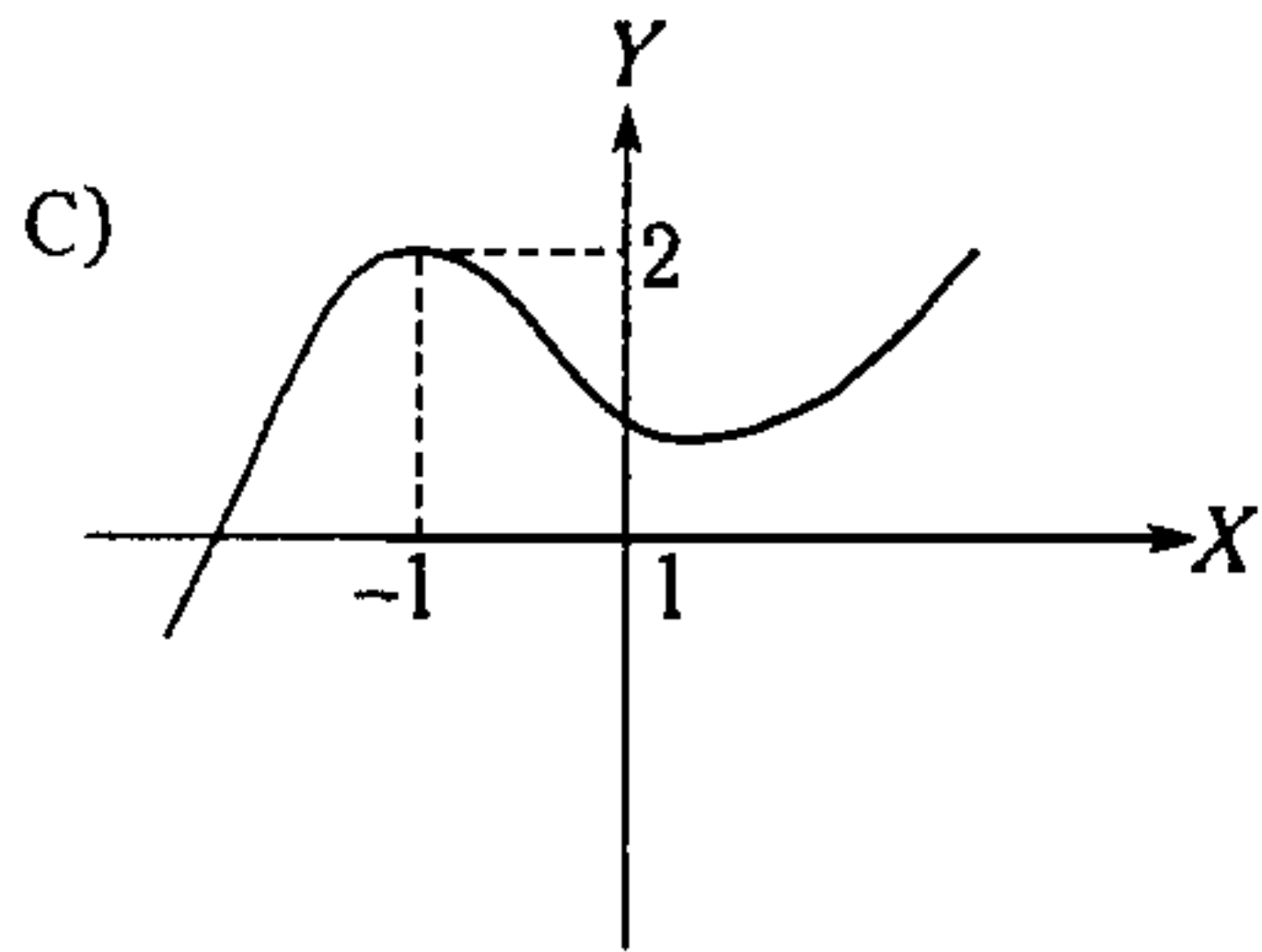
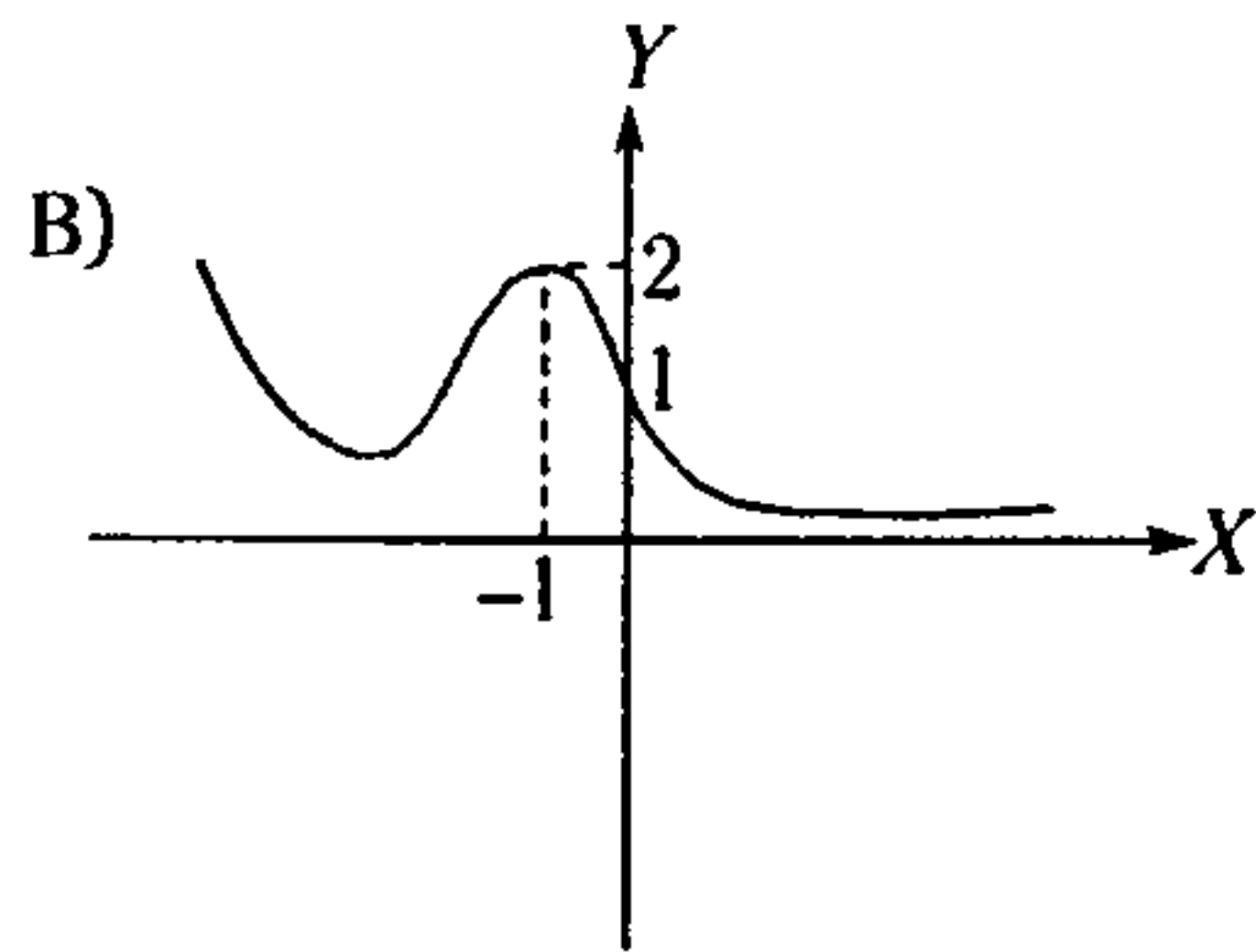
y además  $A = \{a; b; c; a+b\}$

Halle:  $n(A)$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

34. Dar la gráfica de la función, cuya regla de correspondencia es  $y = \log_2 f(x)$ , si la gráfica de  $f$  es:





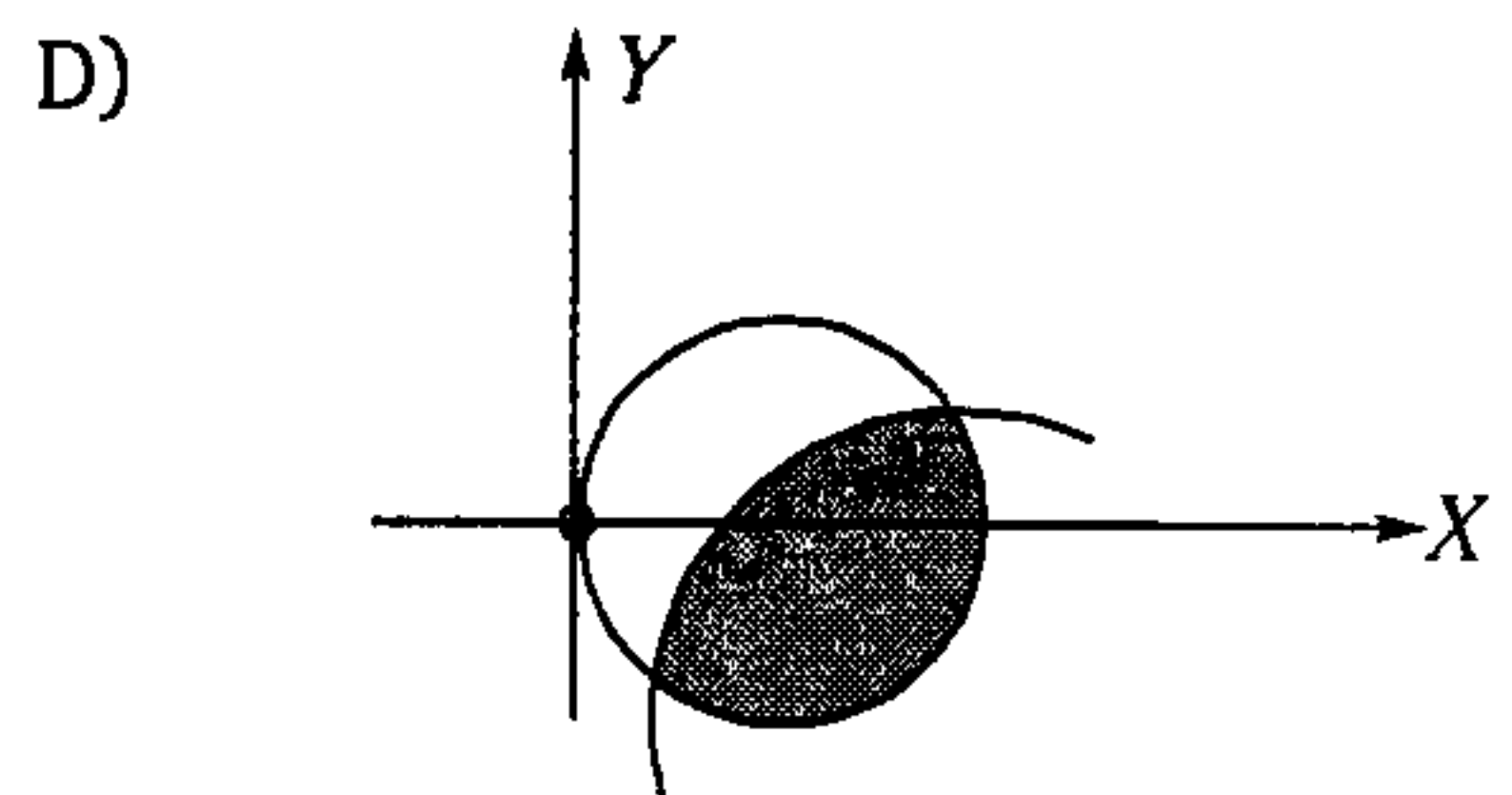
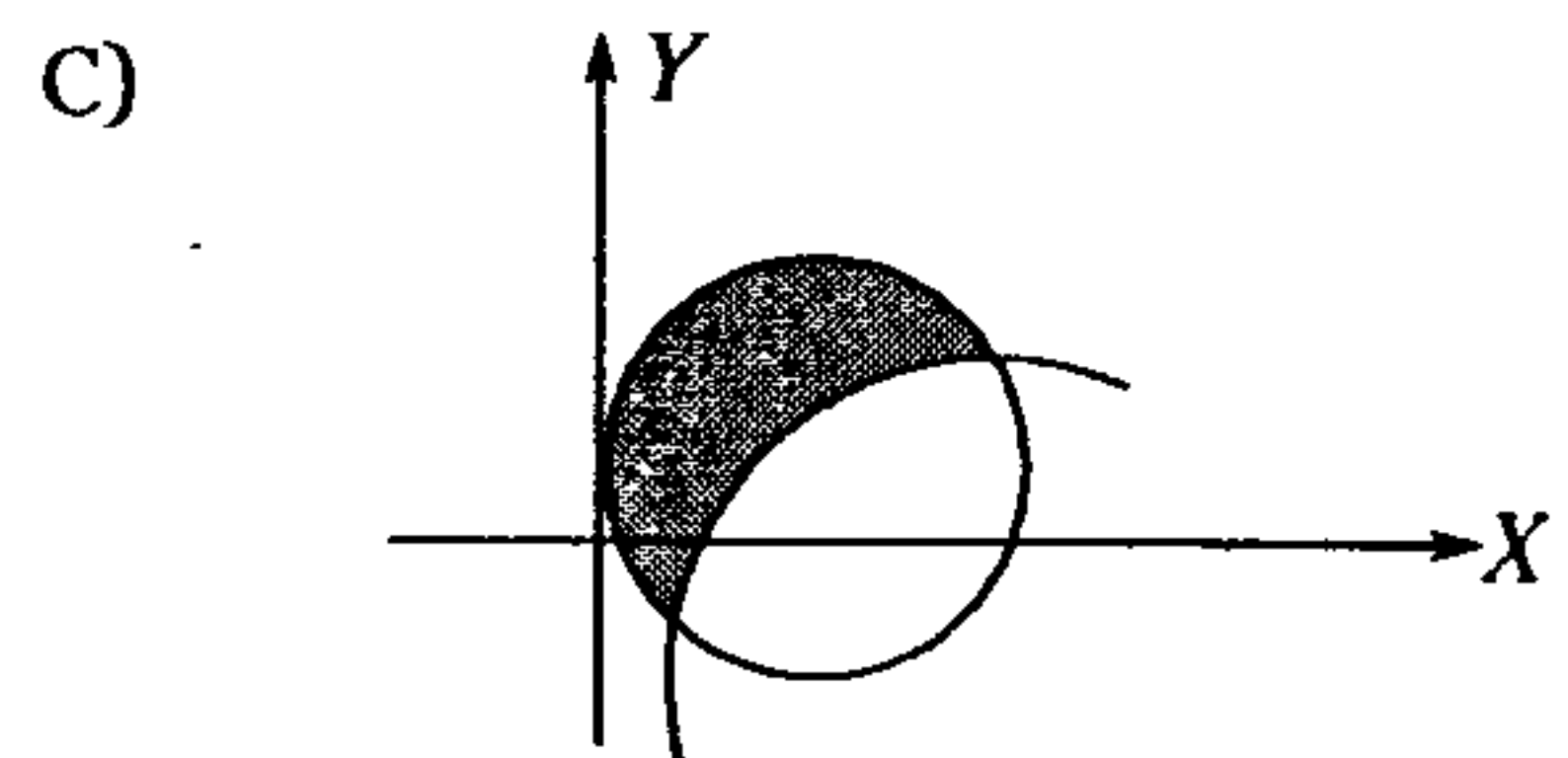
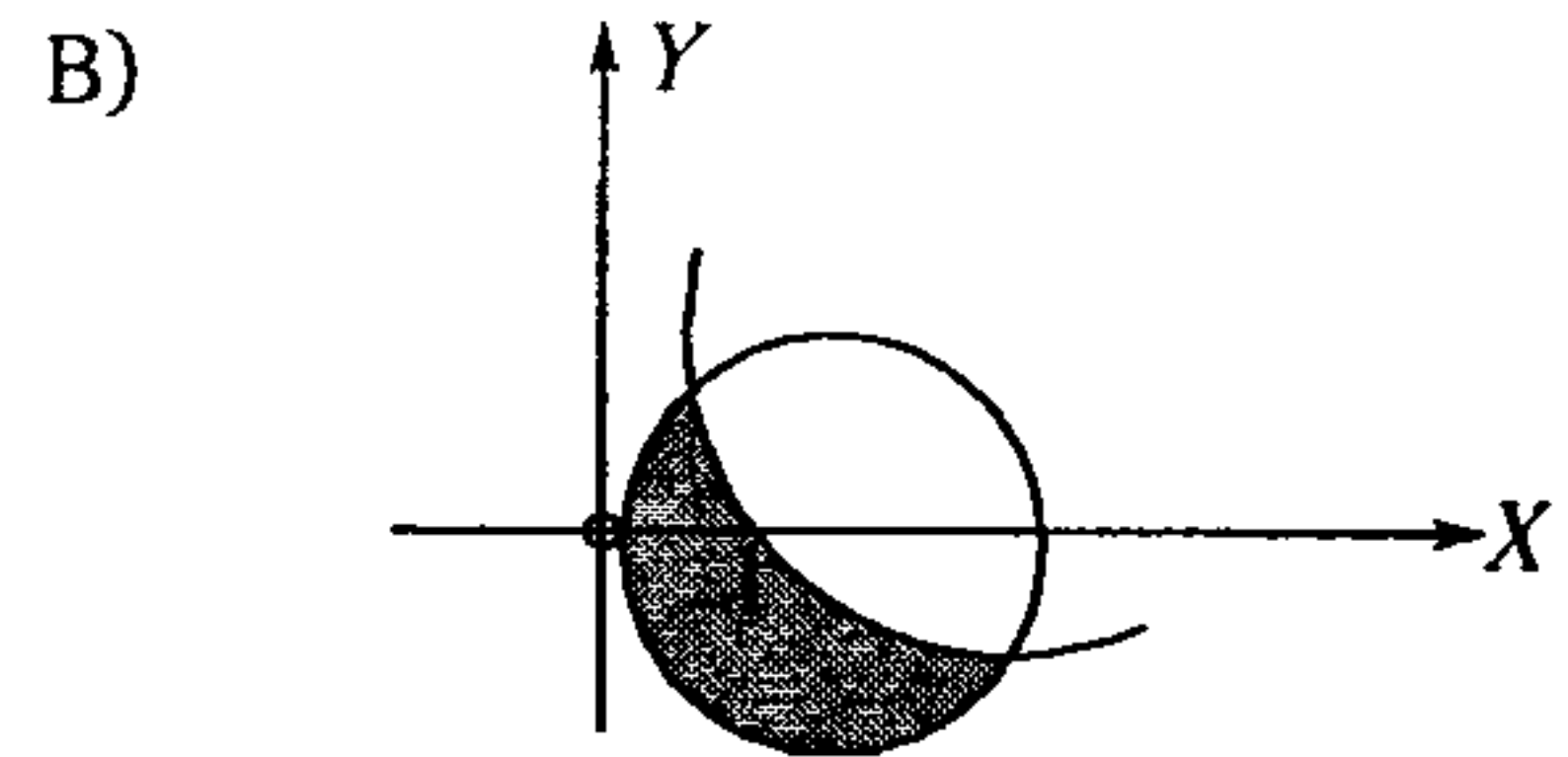
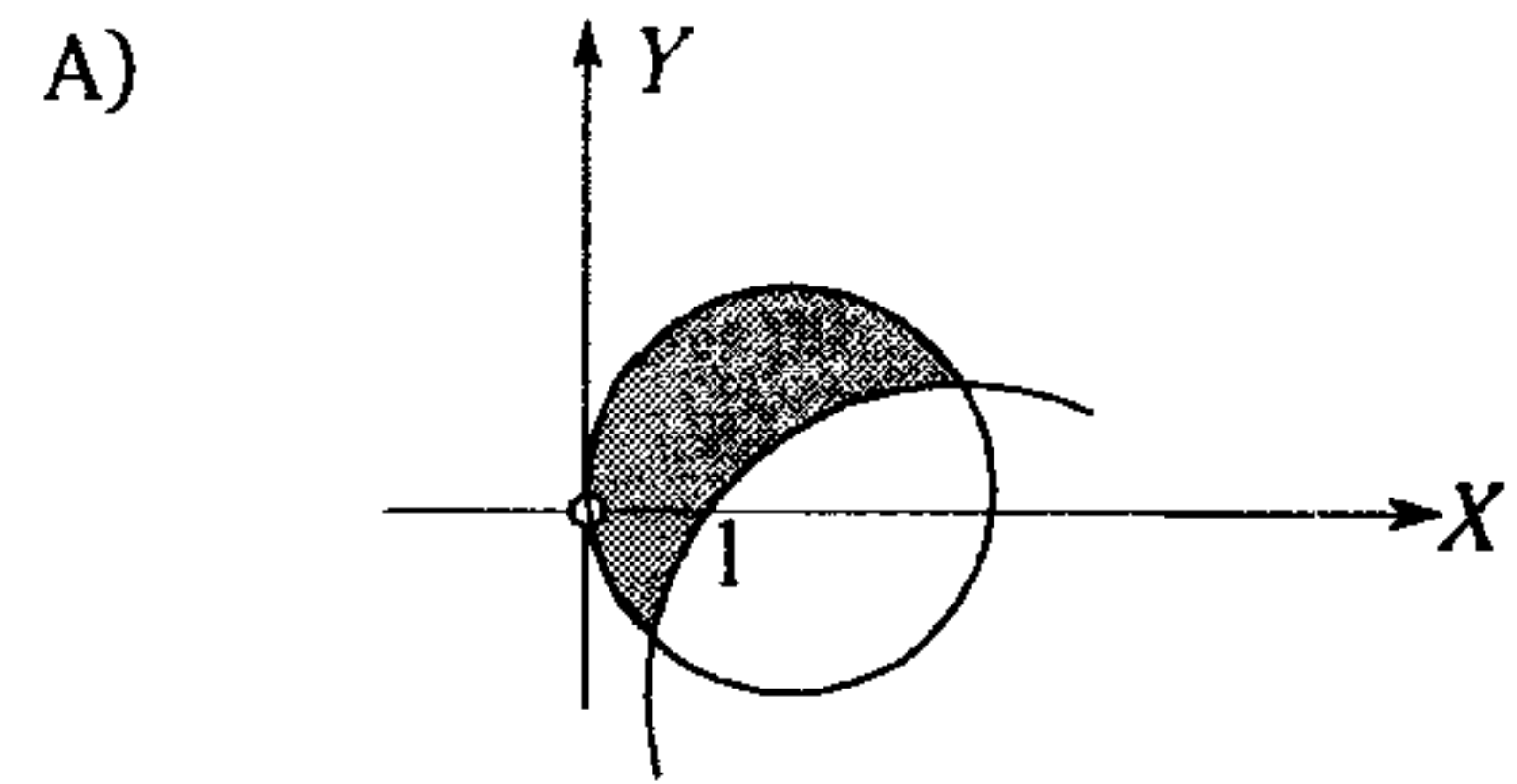
E) no existe

35. Dar la gráfica de  $R_1 \cap R_2 \cap R_3$  si:

$$R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \log_2 x \leq y\}$$

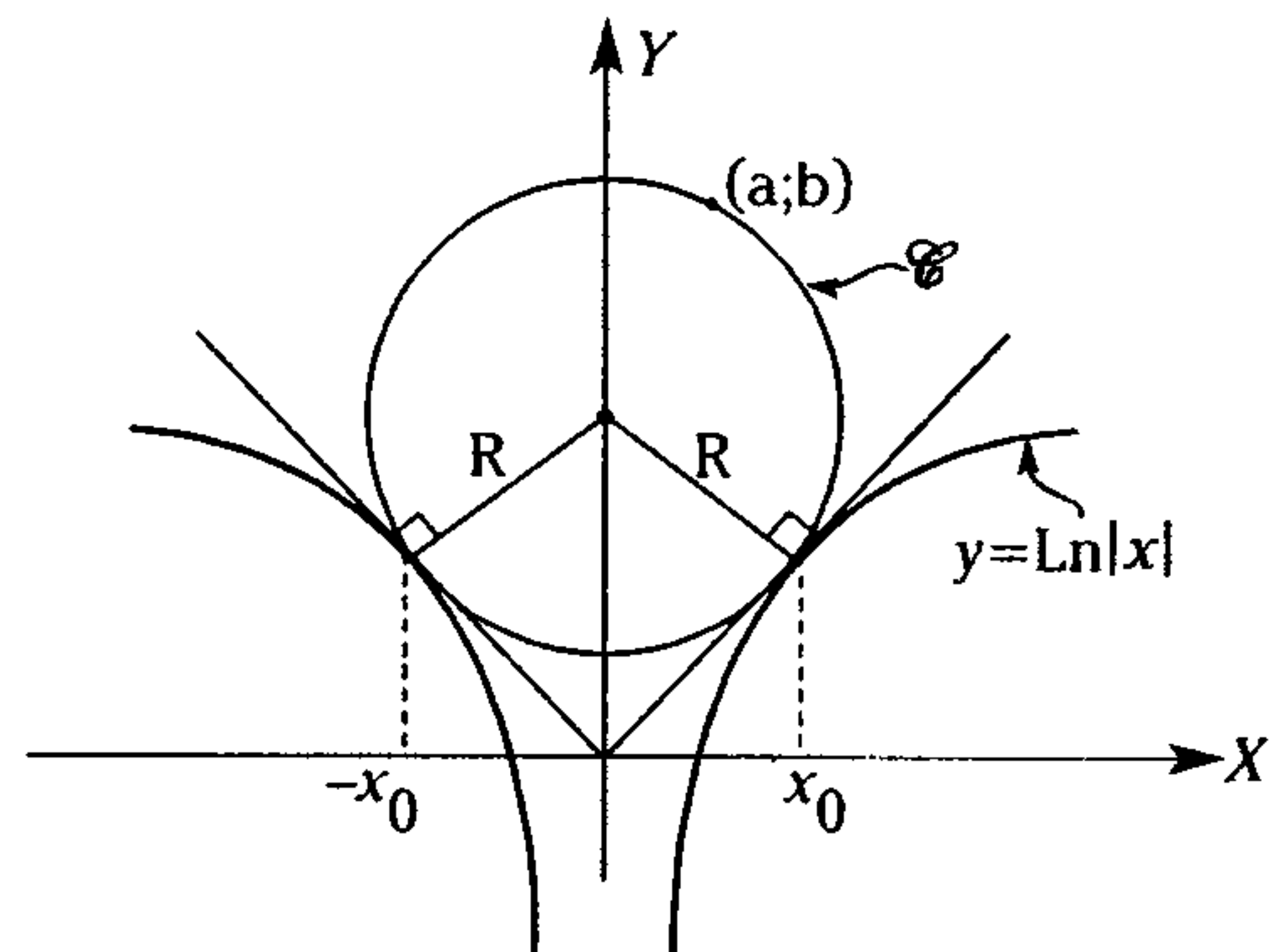
$$R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 1\}$$

$$R_3 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + 3) \left( x^2 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x + 1}} + x \right)}{x + x^3 + x^5 + x^7} \geq 0 \right\}$$



E) no existe

36. Del gráfico de funciones se tiene







45. Luego de resolver:

$$\log_{\text{sen} x} 2 \cdot \log_{\text{sen}^2 x} a + 1 = 0$$

donde  $a \in \langle 0; 1 \rangle$ ; dé como respuesta:  $\text{sen} x$

- A)  $2^{-1}$       B)  $2^{-\log_2 a}$       C)  $2^{\sqrt{\frac{-\log_2 a}{2}}}$   
 D)  $2^{\sqrt{\log_2 a}}$       E)  $2^{\frac{1}{2\log_a 2}}$

46. La población de una nación crece cada año

en  $\left(\frac{1}{100}\right)$  de lo que era el año precedente.

¿En cuántos años logrará ser dos veces más que la inicial?

Datos:  $\log 1,01 = 0,00432$   
 $\log 3 = 0,4712$

- A) menos de 11 años  
 B) más de 11 años  
 C) 100  
 D) 111  
 E) 99

47. Resolver:

$$x^{\log_a y} + y^{\log_a x} = 2x^3$$

Si:  $a \in \langle 1; +\infty \rangle$

- A)  $y = a^3; x \in \mathbb{R}^+$   
 B)  $x = 1; y \in \mathbb{R}^+$   
 C)  $\{x; y\} \in \mathbb{R}$   
 D)  $A \wedge B$   
 E)  $A \vee B$

48. El logaritmo de "N" en base 7 es el mismo que logaritmo de M en base  $\sqrt{7}$ ; si

$$M+N = \frac{3}{4}$$

Calcular  $\frac{M}{N}$

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{4}$       C) 2  
 D)  $\frac{1}{8}$       E)  $\frac{1}{6}$

49. Si:  $ab = c$

Calcular

$$\sqrt[4]{\frac{\log^3 a^3 + \log^3 b^3 + \text{colog}^3 c^3}{\text{colog} a \cdot \text{colog} b \cdot \text{colog} c^3}}$$

- A) 3      B) 10      C) 11  
 D) 12      E)  $\sqrt{2}$

50. Si:  $\log_b a$  y  $\log_{\sqrt{2}} b$  son cantidades positivas, calcular un valor posible de:

$$\frac{2}{a} + 4\log_{0,5} a ; a \neq b$$

Donde:

$$\log_b a + 11\log_a b = 12$$

$$\log_{\sqrt{2}} b - 7\log_b \sqrt[7]{2} = -1$$

- A) 10      B) 12      C) 16  
 D) 8      E) 20

51. Si se sabe que:

$$\log x - \log 23 = \log y + 1$$

$$(0,005134)^{2,29} \cdot \text{antilog}(x-y)^2 = 1$$

Halle x si:  $\log 51,34 = 1,710$

- A) 2,01      B) 2,19      C) 2,29  
 D) 2,30      E) 2,41

52. Si:  $a > 1; b > 1; c > 1; \wedge N > 1$

Simplificar:

$$b^a \left| \frac{\log \log_b (\text{antilog}_c \text{colog}_c N)}{\log a} \right|$$

- A)  $abcN$       B)  $a$       C)  $-N$   
 D)  $N$       E)  $\frac{1}{N}$

53. Halle:  $\log_{\left(\frac{x}{y}\right)} xy + \log_{xy} \left(\frac{x}{y}\right)$

Si:  $\frac{1-2\log_{xy} y}{1+2\log_{\left(\frac{x}{y}\right)} y} = 9$

- A)  $\frac{10}{3}$       B)  $\frac{1}{3}$       C) 1  
D)  $\frac{1}{2}$       E) 2

54. Resolver:

$$\sqrt{\log x - 1} + 21 > \log x$$

- A)  $[10; 10^{26}]$       B)  $\langle 17; 26 \rangle$   
C)  $\langle 10^{17}; 10^{26} \rangle$   
D)  $[10; 10^{26})$       E)  $\langle 1; 26 \rangle$

55. Resolver:

$$x^{1+\log_b x} > b^2 x; \quad b > 1$$

- A)  $\langle -\infty; 0 \rangle$   
B)  $\langle 0; +\infty \rangle$   
C)  $\langle 0; b^{-\sqrt{2}} \rangle \cup \langle b^{\sqrt{2}}; +\infty \rangle$   
D)  $\langle -\infty; \sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; +\infty \rangle$   
E)  $\langle -\infty; -b \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$

56. Si  $[a; b]$  es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{|\log x - 2| - 1} > \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$$

Calcular  $\frac{b}{a}$

- A)  $10^{-1}$       B) 1      C) 10  
D)  $10^2$       E)  $10^3$

57. Si  $\log_m^a = 2$

$$\log_m^b = 3$$

$$\log_m^c = 4$$

Halle el menor valor de  $a+b+c$ .

- A)  $m$       B)  $3m$       C)  $3m^3$   
D)  $m^3$       E)  $m^9$

58. Calcular con siete cifras decimales el valor de  $x$ .

$$x = \sqrt[8]{\frac{3\sqrt{0,002} \times 0,0028}{0,04 \times 11 \times \sqrt[3]{6,75869}}}$$

- A) 0,3477395      B) 0,3468752  
C) 0,2943563  
D) 0,2882317      E) 0,2935439

59. Resolver la ecuación exponencial

$$2^{0,5^{1,5^x}} = 8$$

- A) -1,58496  
B)  $\log(\log 2)$   
C)  $\log_2(\log 3/2)$   
D)  $\log_{0,5} 3$   
E) No existe valor real de  $x$

60. Resolver

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^p = y^q \end{cases}$$

e indicar el valor de  $y$ .

- A)  $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}$       B)  $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$       C)  $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{q-p}}$   
D)  $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}}$       E)  $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}$



1	<b>B</b>	16	<b>B</b>	31	<b>C</b>	46	<b>A</b>
2	<b>A</b>	17	<b>A</b>	32	<b>E</b>	47	<b>D</b>
3	<b>D</b>	18	<b>B</b>	33	<b>B</b>	48	<b>A</b>
4	<b>C</b>	19	<b>D</b>	34	<b>C</b>	49	<b>A</b>
5	<b>D</b>	20	<b>E</b>	35	<b>A</b>	50	<b>D</b>
6	<b>B</b>	21	<b>D</b>	36	<b>A</b>	51	<b>D</b>
7	<b>D</b>	22	<b>C</b>	37	<b>A</b>	52	<b>E</b>
8	<b>B</b>	23	<b>A</b>	38	<b>B</b>	53	<b>A</b>
9	<b>A</b>	24	<b>B</b>	39	<b>E</b>	54	<b>D</b>
10	<b>B</b>	25	<b>C</b>	40	<b>E</b>	55	<b>C</b>
11	<b>A</b>	26	<b>D</b>	41	<b>C</b>	56	<b>D</b>
12	<b>C</b>	27	<b>B</b>	42	<b>A</b>	57	<b>C</b>
13	<b>E</b>	28	<b>E</b>	43	<b>C</b>	58	<b>B</b>
14	<b>C</b>	29	<b>D</b>	44	<b>D</b>	59	<b>E</b>
15	<b>C</b>	30	<b>C</b>	45	<b>C</b>	60	<b>C</b>