

TD 02

Vibration forcée (excitation harmonique)

Problème 1

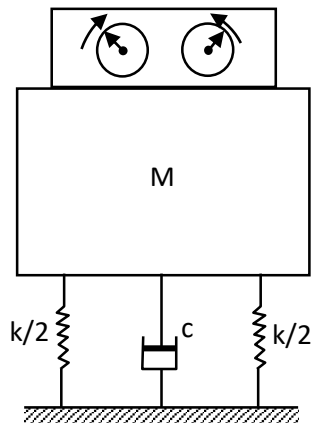
- a- Un élément d'une machine pesant 1,95 kg vibre dans un milieu visqueux. Déterminer le coefficient d'amortissement, quand une force harmonique excitatrice de 24,46 N donne une amplitude à résonance de 1,27 cm avec une période de 0,20 s.
- b- Si le système précédent est excité avec une force de fréquence 4 cps. Quel sera le pourcentage d'augmentation de l'amplitude de la vibration forcée si l'amortisseur est supprimé.

Problème 2

Un système masse-ressort est excité par une force $F_0 \sin(\omega t)$. A la résonance, la valeur mesurée de l'amplitude est 0,58 cm. A 0,8 de la fréquence de résonance, l'amplitude mesurée est de 0,46 cm. Déterminer le facteur d'amortissement ζ du système.

Problème 3

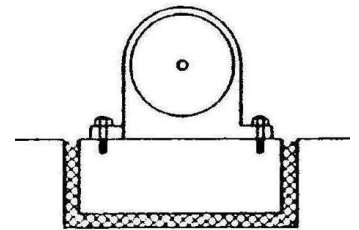
Les masses excentrées tournantes en opposition de la Figure sont utilisées pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une structure de masse 181,4 kg. A une vitesse de 900 tpm, un stroboscope montre les masses excentrées en position maximale haute, au même moment, la structure se déplaçant vers le haut de sa position d'équilibre à une amplitude de 21,6 mm. Si le déséquilibre de chaque roue de l'excitateur est de 0,0921 kg.m, déterminer :



- a- La fréquence naturelle de la structure.
- b- Le facteur d'amortissement de la structure.
- c- L'amplitude de la vibration à 1200 tpm.
- d- La position angulaire des masses excentrées lorsque la structure est entrain de se déplacer vers la position haute, à partir de sa position d'équilibre.

Problème 4

Un moteur électrique de masse 68 Kg est monté sur un block isolateur de masse 1200 Kg. La fréquence naturelle de l'ensemble est 160 tpm et le coefficient d'amortissement $\zeta=0,10$. Si le déséquilibre dans le système produit une force $F=100\sin(31,4.t)$, déterminer l'amplitude de vibration du système et la force transmise au plancher de fixation.



Problème 5

Une force $F=10\sin(\pi t)$ N agit sur un déplacement $x=2\sin(\pi t - \pi/6)$ m.

Déterminer :

- a- Le travail effectué durant la première demi-seconde.
- b- Le travail effectué durant les 6 premières secondes.

Problème 6

Les corps se déplaçant avec une vitesse modérée (3 à 20 m/s) dans des fluides comme l'eau ou l'air, sont amortis par une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse. Déterminer l'amortissement équivalent de ces forces, sur un système vibrant, et calculer l'amplitude du mouvement à la résonance.

NB : Poser : $F_d = \pm a.\dot{x}^2$ et $x = -X \cos \omega t$

Solution du Problème 1

Données : $m = 1.95\text{kg}$, $F_0 = 24.46\text{N}$, $X_r = 1.27\text{cm}$, $T_n = 0.2\text{s}$

a) Voir cours Eq : 2.7 : $X_r = \frac{F_0}{c\omega_n} = \frac{F_0 T_n}{c 2\pi} \Rightarrow c = \frac{F_0 T_n}{2\pi X_r} = \frac{24.46\text{N} * 0.2\text{s}}{2\pi * 1.27 * 10^{-2}\text{m}} = 61.3\text{kg/s} \rightarrow c = 61.3\text{kg/s}$

b) Fréquence d'excitation : $f = 4\text{cps}$ (coup par seconde = Hz) et $f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{0.2\text{s}} = 5\text{Hz}$ donc $r = \frac{f}{f_n} = 0.8$

L'amplitude de la vibration en présence de l'amortissement (voir cours Eq : 2.5) : $X_1 = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

Et sans amortissement ($\zeta = 0$) $X_0 = \frac{F_0 / k}{|1-r^2|}$. Le rapport des deux l'amplitudes est donc :

$$\frac{X_0}{X_1} = \frac{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}{(1-r^2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)^2} \text{ avec } \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{cT_n}{4\pi m} = \frac{61.3\text{kg/s} * 0.2\text{s}}{4\pi * 1.95\text{kg}} = 0.5$$

D'où : $\frac{X_0}{X_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{2 * 0.5 * 0.8}{1 - 0.8^2}\right)^2} = 2.44$, L'augmentation de l'amplitude est de $\frac{X_0 - X_1}{X_1} = 144\%$

Solution du Problème 2

Pour une excitation harmonique du type $F(t) = F_0 \sin \omega t$, l'amplitude de la réponse du système vibratoire est donnée par la formule (Eq 2.5 du cours) :

$$X_1 = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \text{ avec } r = \frac{\omega}{\omega_n}.$$

Les données du problème sont : $X(r=1) = X_r = 0.58\text{cm}$ et $X(r=0.8) = X_1 = 0.46\text{cm}$

$$\frac{X_1}{2\zeta X_r} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \text{ Nous avons une équation à une seule inconnue qui est le facteur d'amortissement.}$$

La résolution donne : $\zeta = 0.1847$.

Solution du Problème 3 Problème de déséquilibre rotatif (balourd)

Données : $M = 181.4\text{kg}$, $\omega = 900 \text{ tr/mn}$, $me = 0.0921\text{kg.m}$

a) A 900 tr/min, le stroboscope montre les masses excentrées en position maximale haute, au même moment, la structure se déplaçant vers le haut de sa position d'équilibre. Ce constat indique une situation de résonance vu que la phase entre l'excitation et la réponse est égale à 90° .

Donc la fréquence de résonance (naturelle) du système est : $f_n = 900 \text{ tr/mn} = \frac{900}{60} = 15\text{Hz}$.

Et l'amplitude mesurée est celle de la résonance : $X_r = 21.6\text{mm}$

b) $X_r = \frac{F_0}{2\zeta k} = \frac{(2me\omega_n^2)}{2\zeta k}$. Le 2 dans le numérateur est le balourd global puisqu'il y a deux masses

excentrées. Donc : $X_r = \frac{me\omega_n^2}{\zeta k} = \frac{me}{\zeta M} \Rightarrow \zeta = \frac{me}{MX_r} \rightarrow \zeta = \frac{0.0921\text{kg.m}}{181.4\text{kg} * 21.6 * 10^{-3}\text{m}} = 0.0235$

c) Nouvelle fréquence d'excitation : $f = 1200 \text{ tr/mn} = 20\text{Hz}$

L'amplitude de la réponse est : $\frac{MX}{2me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ (Voir cours Eq 2.11)

Le calcul donne : $X(f = 20\text{Hz}) = \frac{2 * 0.0921}{181.4} \frac{(4/3)^2}{\sqrt{(1 - (4/3)^2)^2 + (2 * 0.0235 * 4/3)^2}} = 2.31\text{mm}$

d) On suppose que lorsque la structure se déplace vers le haut à partir de sa position d'équilibre, sa position angulaire est nulle. On calcul alors la phase :

$$\tan \phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} = \frac{2 * 0.0235 * 4/3}{1 - (4/3)^2} = -0.0804, \text{ Comme } r > 1 \text{ alors } \pi/2 < \phi < \pi \text{ et donc } \phi = 175.4^\circ$$

Solution du Problème 4 Isolation des vibrations

Données : $m = 68.0\text{kg}$, $M = 1200\text{kg}$, $f_n = 160\text{tr/mn}$, $\zeta = 0.1$, $F = 10.\sin(10\pi t)$

a) Calcul de l'amplitude de la vibration : Fréquence excitatrice : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\text{Hz}$,

La fréquence naturelle du système : $f_n = \frac{160\text{tr/mn}}{60} = 2.67\text{Hz} \Rightarrow r = \frac{f}{f_n} = 1.875$

L'amplitude de la vibration du plancher : $X = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ (Voir cours Eq .2.5)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + m}} \Rightarrow k = \omega_n^2 (M + m) = (2\pi f_n)^2 (M + m) = (2\pi * 2.67)^2 * (1200 + 68) = 356\text{kN} / \text{m}$$

L'amplitude : $X = \frac{100 / 356000}{\sqrt{(1 - 1.875^2)^2 + (2 * 0.1 * 1.875)^2}} = 0.1105\text{mm}$

La force transmise au plancher (Eq 2.21) : $\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = 0.42 \Rightarrow F_T = 42\text{N}$

Solution du Problème 5 Travail dépensé par frottement

Le travail effectué par une force de frottement harmonique sur une trajectoire sinusoïdale :

$$W(t) = \int_0^{x_0} F(t) dx = \int_0^{t_0} F(t) \cdot \dot{x} dt \text{ avec : } F(t) = 100\sin(\pi t)\text{N et } x(t) = 2\sin(\pi t - \pi/6)\text{m}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} 2\pi \cos(\pi t - \pi/6)\text{m/s} \Rightarrow W(t) = 200\pi \int_0^{t_0} [\sin(\pi t) \cos(\pi t - \pi/6)] dt = 15.71 \left[t - \frac{\sin(2\pi t + \pi/3)}{\pi} \right]_0^{t_0}$$

$$W(t_0 = 0.5\text{s}) = 16.51\text{J}$$

$$W(t_0 = 1.0\text{s}) = 15.71\text{J}$$

Ce qui donne pour les différents laps de temps :

$$W(t_0 = 2.0\text{s}) = 31.42\text{J}$$

$$W(t_0 = 6.0\text{s}) = 94.25\text{J}$$

Solution du Problème 6 Amortissement équivalent

La force de frottement est définie par : $F_d = \pm a\dot{x}^2$ et le déplacement par : $x(t) = -X \cos(\omega t)$

Le travail dépensé par frottement sur une période est : $W_d = 2 \int_{-X}^X a\dot{x}^2 dx = 2a\omega^2 X^3 \int_0^\pi \sin^3(\omega t) d(\omega t) = \frac{8}{3} a\omega^2 X^3$

L'amortissement équivalent est obtenu en admettant que :

$$W_d = \pi c_{eq} \omega X^2 \Rightarrow c_{eq} = \frac{8}{3\pi} a\omega X$$

L'amplitude à résonance est : $X_r = \frac{F_0}{c_{eq} \omega_n} = \frac{F_0}{\left(\frac{8}{3\pi} a\omega_n X_r \right) \omega_n} \Rightarrow X_r = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8a\omega_n^2}}$