

- Math résumé -

Chapitre 1, les fonctions

# 1) Domaine de définition

Polynôme = Df

Ex 1:  $\sqrt{2x+1}$

$$2x+1 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = [-\frac{1}{2}; +\infty[$$

Ex 2:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$$\begin{cases} x^2-1 \neq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

Si Df =  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

Ex 3:  $\sqrt[3]{x^2-1}$

Df =  $]-\infty; +\infty[$

## 2) Parité

On dit une fonction est paire

si  $f(-x) = f(x)$

et on dit une fonction impaire

si  $f(-x) = -f(x)$

Ex 1:  $f(x) = x^2 + 3$

$f(-x) = (-x)^2 + 3$

$= x^2 + 3 = f(x)$

une fonction est paire

Ex 2:  $f(x) = x^3 + x$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$= -x^3 - x$

$= -(x^3 + x) = -f(x)$

une fonction est impaire

ima

les limites

les formes indéterminées:

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{0}, \frac{0}{\infty}, \infty - \infty$

quelque astuce pour enlever l'indétermination

1) à l'infini:  $ax^n + bx^{n-1} + \dots$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ax^n$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = +\infty$

2)  $f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^m + dx^{m-1} + \dots}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{cx^m}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^3 - 1}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$

Application: Calculer les limites

- les asymptotes -

Règle

C'est  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

on dit la courbe admet une asymptote horizontale d'équation

$y = a$

C'est  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

on dit la courbe admet une asymptote

verticale d'équation  $y = b$

C'est  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (ax + b)] = 0$

on dit la courbe admet une asymptote

oblique d'équation  $y = ax + b$



Ex:

ima

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Calcul des limites

donner la définition domaine et les asymptotes:

→ domaine de définition  
 $x+2 \neq 0$

$$D_f ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

→ les limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

La Courbe admet des asymptotes

(1) - Verticale d'équation  $y = -2$

(2) - Horizontale d'équation  $y = 0$

(2) - Dérivées et ses Applications.

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$ax+b$	$a$
$x^n$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Dérivées Composées

$u(x)$	$w(u)$
$u+v$	$w' + v'$
$u \cdot v$	$u'v + v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$
$u^n$	$n u^{n-1} u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} u'$

(2) - Équation de la tangente en un point  $a$ .

$$y' = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Ex:

donner l'équation de la tangente en  $u=1$  pour la fonction  $y = u^2 + 1$ .

Donc

$$y = f'(1)(u-1) + f(1)$$

$$f'(1) = 2 \times 1 = 2$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

donc

$$y = 2(u-1) + 2 = 2u$$

Dérivées Secondes.

$f(x)$  est une fonction

$f'(x)$  la première dérivée

$f''(x)$  la seconde dérivée

$$\text{Ex: } f(x) = 2x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 4x + 2$$

$$f''(x) = 4$$

# Mathématiques Derivées Seconde et ses applications

ima

- Résumé  
- Fonction exponentielle

## Point critique

(3)

$f'(a) = 0$  le point critique

Ex:  $f(x) = x^2 + 2x$

$$f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$x + 1 = 0 \quad x = -1$$

donc  $x = -1$  point critique

Si  $f''(u) > 0$  convexe

Si  $f''(u) < 0$  concave

convexe

concave

$\Rightarrow$  Si  $f''(u) = 0$

$u = a$  le point de critique

Ex:  $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} - \frac{2x}{2} + 1$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} + 1$$

$$= \frac{x^2 - x + 2}{2}$$

$$= x^2 - x$$

$$f''(x) = 2x - 1$$

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	convexe	point critique	concave	convexe	convexe

- domaine de définition

$$]-\infty, +\infty[ \quad e^x > 0$$

- Propriétés

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^n = e^{na}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = 2,7$$

- les limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^x = 0$$

- des Exemples

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x + 1) e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 1}{0} = 0$$



# - Mathima -

Ex 2 =  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \frac{1}{e^x}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \boxed{0}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x = \boxed{-\infty}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty$  (u)

- Dérivée -

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$   
 $[e^{f(x)}]' = f'(x) \times e^{f(x)}$

Ex:  $e^{2x+2x+1} = 2x+2e$   
 $= (2(x+1))e^{2x+2x+1}$

Ex:  $(x^2 e^{3x})' = 2xe^{3x} \times x^2 e^{3x} + 3e^{3x} \times x^2$   
 $= (2x^2 + 2x) e^{3x}$

Résumé la fonction  
 -  $\ln x$  -

domaine de définition :

Df  $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	$\emptyset$	+

Parapente

$\frac{\ln a}{\ln b} = \ln a - \ln b$

$\ln a = \frac{1}{\ln a}$

$\ln a^n = n \ln a$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln a + \ln b = \ln ab$

$e^u = a$

$x = \ln a$

$\ln 2 = e^2$

$e^{\ln a} = a$

Signe ( $a \ln u + b$ ).

Exemple : Signe ( $-2 \ln x + 3$ )

Def:  $\Rightarrow \ln u > 0 \quad ]0, +\infty[$

$-2 \ln x + 3 = 0$

$-2 \ln x = -3$

$\ln x = \frac{3}{2}$

$x = e^{\frac{3}{2}}$

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$-2 \ln x + 3$	$\parallel$	+	-

Signe  $(\ln u)^2 + 5 \ln u + 6$

Exemple :

$\ln(u)^2 + 2 \ln u - 3$

$x = \ln u$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 = 4$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x_1 = e^{-3}, x_2 = e$$

	0	$e^{-3}$	$e$	$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$		+	-	+

Derivées

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\ln u \rightarrow \frac{u'}{u}$$

$$\ln(ax) \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\text{Ex: } \ln 2x \rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$\ln(-x) \rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$\ln(x^2 - 3x + 1) \rightarrow \left[ \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} \right]$$

$$-(x \ln x) = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x$$

$$= \ln x + 1$$

$$\frac{(u')}{(v)} = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \cdot x - 1 \times \ln x$$

$$= \left[ \frac{1 - \ln x}{x^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$(u^v)^n = 2u'v$$

$$(\ln x)^2 = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

$$= \left[ \frac{2 \ln x}{x} \right]$$

les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = 1$$

des Exemples

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - 1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$$