

## BAB 5 : FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA

### Tujuan Instruksional Khusus :

Mahasiswa diharapkan dapat menuliskan definisi fungsi Gamma dan fungsi Beta, membuktikan beberapa sifat sederhana fungsi Gamma dan fungsi Beta serta dapat mengerjakan soal-soal integral menggunakan fungsi Gamma dan fungsi Beta.

### 5.1. Pendahuluan

Kadang-kadang penyelesaian beberapa masalah persamaan diferensial dan integral, merujuk ke suatu fungsi khas tertentu. Dengan mengetahui sifat-sifat fungsi khas ini, maka penyelesaian masalahnya akan lebih mudah diperoleh.

Ada banyak fungsi khas di dalam matematika yang dipelajari secara khusus, misalnya Fungsi Airy, Fungsi Delta-Drac, Fungsi Error, Fungsi Gamma dan Fungsi Beta. Di dalam bab ini, akan diuraikan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta dengan beberapa sifatnya yang penting serta hubungan keduanya. Ditinjau pula beberapa penggunaan fungsi Gamma dan fungsi Beta untuk menyelesaikan integral-integral yang dengan cara biasa relatif sukar dikerjakan.

### 5.2. Fungsi Gamma

#### Definisi 1:

Fungsi Gamma  $\Gamma$ , suatu fungsi bernilai real dengan satu peubah, didefinisikan oleh suatu bentuk integral, yaitu :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0 \quad \dots\dots\dots(i)$$

### 5.3. Sifat-Sifat Fungsi Gamma

Berikut beberapa sifat penting fungsi Gamma :

1.  $\Gamma(1)=1$

Bukti :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_{x=0}^M = 1.$$

2.  $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

Bukti :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du, \text{ dengan substitusi } x = u^2$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv\right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv.$$

Dengan mengambil transformasi koordinat polar:

$$u=r \cos\theta \text{ dan } v=r \sin\theta$$

diperoleh  $u^2+v^2=r^2$  dan

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right| dr d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$$

jadi  $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ .

3.  $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

Bukti:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^{n+1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -x^n e^{-x} \right)_{x=0}^M - \int_0^{\infty} -e^{-x} dx^n, \text{ dengan integral parsial} \\ &= -\lim_{M \rightarrow \infty} \left( x^n e^{-x} \right)_{x=0}^M + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

mengingat

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} (x^n e^{-x})_{x=0}^M \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^n}{e^M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^n}{1 + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots + \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} + \dots} \\
&\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^n}{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{M} = 0
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= -\lim_{M \rightarrow \infty} (x^n e^{-x})_{x=0}^M + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= 0 + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

4.  $\Gamma(n+1)=n!$  , jika  $n=1,2,3,\dots$

Bukti:

Dari sifat no.3 dan no.1 diperoleh

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)(n-2)\dots \Gamma(1)=n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)=n!$$

Diperhatikan bahwa hubungan  $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$  pada sifat no.3 di atas dapat ditulis :

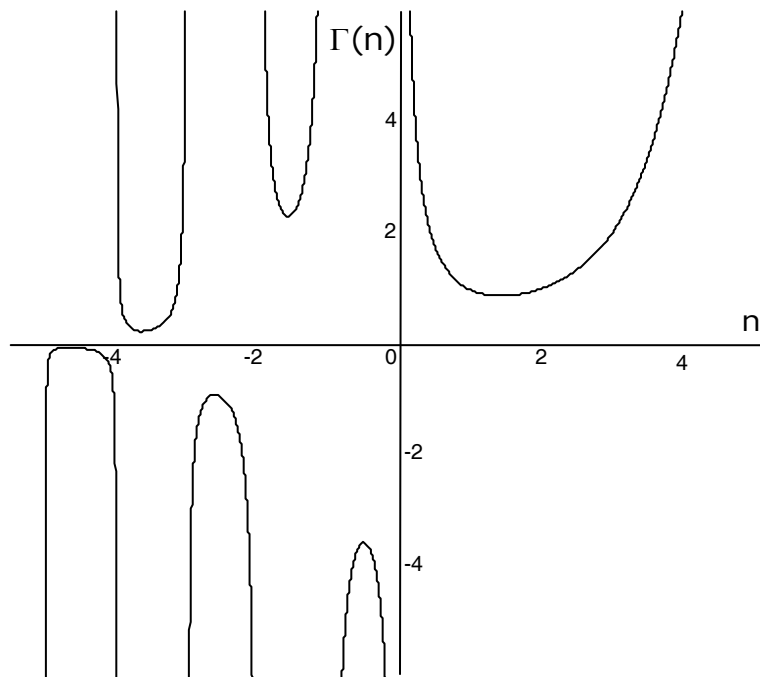
$$\Gamma(n)=\Gamma(n+1)/n \quad \dots\dots\dots (ii)$$

Persamaan (ii) digunakan untuk mendefinisikan fungsi Gamma pada nilai  $n<0$ . Jadi dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh :

$$\Gamma(n)=\begin{cases} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, & n > 0 \\ \Gamma(n+1)/n, & n < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

Dari (iii) terlihat bahwa  $\Gamma(n)$  tidak terdefinisi untuk  $n=0,-1,-2,\dots$

Berikut grafik fungsi gamma :



Sifat no.3 juga menyediakan cara mudah menghitung nilai fungsi gamma pada beberapa titik, misalnya :

$$\Gamma(5/2) = \Gamma(1 + 3/2) = 3/2 \Gamma(3/2) = 3/2 \cdot 1/2 \Gamma(1/2) = 3/4 \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1/2) = \Gamma(-1/2 + 1) / (-1/2) = -2 \Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

## 5.4. Fungsi Beta

### Definisi 2:

Fungsi Beta B, suatu fungsi bernilai real dengan dua peubah, didefinisikan oleh suatu bentuk integral, yaitu :

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad m > 0, n > 0 \quad \dots\dots\dots(iv)$$

Bentuk-bentuk lain fungsi Beta dapat diperoleh melalui bermacam-macam substitusi pada (iv) :

1. Jika diambil  $x = \sin^2 \theta$ , maka  $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

Batas-batas integrasi menjadi :  $x=0 \Rightarrow \theta=0$  dan  $x=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$

Diperoleh :

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2m-2} (\cos \theta)^{2n-2} (2 \sin \theta \cos \theta d\theta) \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \end{aligned} \quad \dots (v)$$

2. Jika diambil  $x = t/(1+t)$ , maka  $dx = dt/(1+t)^2$

Batas-batas integrasi menjadi :  $x=0 \Rightarrow t=0$  dan  $x=1 \Rightarrow t \rightarrow \infty$

Diperoleh :

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m-1}} \frac{1}{(1+t)^{n-1}} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt \end{aligned} \quad \dots (vi)$$

## 5.5. Sifat-Sifat Fungsi Beta

Berikut beberapa sifat penting fungsi Beta :

1.  $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Bukti:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} u^{2m-1} e^{-u^2} du, \text{ dengan substitusi } x=u^2$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} v^{2n-1} e^{-v^2} dv, \text{ dengan substitusi } x=v^2$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left( 2 \int_0^{\infty} u^{2m-1} e^{-u^2} du \right) \left( 2 \int_0^{\infty} v^{2n-1} e^{-v^2} dv \right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{2m-1} v^{2n-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

Selanjutnya diambil transformasi koordinat polar :

$$u=r \cos \theta \text{ dan } v=r \sin \theta$$

diperoleh,

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2m-1} v^{2n-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty (r \cos \theta)^{2m-1} (r \sin \theta)^{2n-1} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta dr d\theta \\ &= \left( 2 \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr \right) \left( 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \right) \\ &= \Gamma(m+n) B(m,n)\end{aligned}$$

2.  $B(m,n)=B(n,m)$

Bukti:

Berdasarkan sifat no.1 diperoleh

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = B(n,m)$$

Dari sifat no.1, khususnya bila  $m+n=1$  maka

$$B(m,n)=B(m,1-m)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(1-m)}{\Gamma(1)}=\Gamma(m)\Gamma(1-m), \quad 0 < m < 1 \quad \dots (vii)$$

Di lain pihak berdasarkan persamaan (vi) diperoleh juga

$$B(m,1-m)=\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+(1-m)}} dt = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t} dt \quad \dots\dots\dots (viii)$$

Integral pada (viii) dapat ditentukan nilainya (walaupun tidak dibuktikan karena memerlukan landasan teori di luar lingkup materi dalam tulisan ini), yaitu :

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(m\pi)} \quad \dots\dots\dots (ix)$$

Dari persamaan (vii), (viii) dan (ix) diperoleh hubungan

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin(m\pi)}, \quad 0 < m < 1 \quad \dots\dots\dots (x)$$

## 5.6. Terapan

### Terapan Fungsi Gamma

Terapan langsung fungsi gamma adalah untuk perhitungan beberapa bentuk integral yang cukup sulit jika dikerjakan dengan cara biasa. Beberapa contoh masalah integral tersebut adalah :

$$1. \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$2. \quad \int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \dots$$

Ambil substitusi  $y=2x$ , maka  $dx = \frac{1}{2}dy$  dan batas-batas integrasi menjadi :  $x=0 \Rightarrow y=2 \cdot 0=0$  dan  $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$  sehingga

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} (y/2)^6 e^{-y} \left(\frac{1}{2} dy\right) = \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} y^6 e^{-y} dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = 45/8$$

$$3. \quad \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \dots$$

substitusi  $y=x^3$ , maka  $dy=3x^2dx$  dan batas-batas integrasi menjadi :  $x=0 \Rightarrow y=0^3=0$  dan  $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$  sehingga

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \int_0^{\infty} (y^{1/3})^{1/2} e^{-y} \left(\frac{dy}{3y^{2/3}}\right) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \dots$$

substitusi  $y = -\ln x \Leftrightarrow x = e^{-y}$ , maka  $dx = -e^{-y} dy$  dan batas-batas integrasi menjadi :  $x=0 \Rightarrow y \rightarrow \infty$  dan  $x=1 \Rightarrow y=0$  sehingga

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_{\infty}^0 \frac{-e^{-y} dy}{\sqrt{y}} = \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$5. \text{ Buktikan } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Bukti : ambil  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ . Karena  $f$  fungsi genap, yaitu

$f(-x) = f(x)$ , maka  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$ , sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt, \text{ dengan substitusi } t = x^2/2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

### Terapan Fungsi Beta

Seperti fungsi Gamma, terapan langsung fungsi Beta adalah untuk perhitungan beberapa bentuk integral yang cukup sulit jika dikerjakan dengan cara biasa. Beberapa contoh masalah integral tersebut adalah :

$$1. \int_0^{\pi/2} \cos^{13} \theta \sin^5 \theta d\theta = \dots$$

Menggunakan persamaan (1.5), diambil  $2m-1=5$  dan  $2n-1=13$  diperoleh  $m=3$  dan  $n=7$  dan



$$\int_0^{\pi/2} \cos^{13} \theta \sin^5 \theta d\theta = \frac{\Gamma(3)\Gamma(7)}{2\Gamma(3+7)} = \frac{2! 6!}{2 \cdot 9!} = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{504}$$

2.  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = \dots$

Dengan substitusi  $x=2y$  akan diperoleh

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = \int_0^1 \frac{4y^2 (2dy)}{\sqrt{2-2y}} = 4\sqrt{2} \int_0^1 y^2 (1-y)^{-1/2} dy = 4\sqrt{2} B(3, 1/2) = \frac{64}{15} \sqrt{2}$$

3.  $\int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx = \dots$

Dengan substitusi  $x^3=8y$  akan diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx &= \int_0^1 2y^{1/3} \sqrt[3]{8-8y} \frac{2dy}{3y^{2/3}} \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 y^{-1/3} (1-y)^{1/3} dy = \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. Buktikan

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots n} \frac{\pi}{2}, & \text{jika } n \text{ bulat positif genap} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots n}, & \text{jika } n \text{ bulat positif ganjil} \end{cases}$$

Bukti:

Pertama, dibuktikan  $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$  sebagai berikut

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(n+1)\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$$

Selanjutnya, jika  $n$  bulat positif genap, maka  $n=2k$  dengan  $k$  suatu bilangan bulat positif, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}(2k+1), \frac{1}{2}\right) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} B(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k + 1)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})(k - \frac{5}{2}) \dots (\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{k(k-1)(k-2)(k-3) \dots 1\Gamma(1)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})(k - \frac{5}{2}) \dots (\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\pi/2)}{k(k-1)(k-2)(k-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\frac{2k-1}{2})(\frac{2k-3}{2})(\frac{2k-5}{2}) \dots (\frac{3}{2})(\frac{1}{2})}{k(k-1)(k-2)(k-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2}) \dots (\frac{2k-3}{2})(\frac{2k-1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-2)(k-1)k} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)(2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k-4)(2k-2)2k} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-4)(n-2)n} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

dan jika  $n$  bulat positif ganjil, maka  $n=2k+1$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta &= \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}(2k+2), \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} B(k+1, \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{k(k-1)(k-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2}) \dots (\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-2)(k-1)k}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) \dots (\frac{2k-3}{2})(\frac{2k-1}{2})(\frac{2k+1}{2})} \\
&= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k-4)(2k-2)2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-5)(n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-4)(n-2)n}
\end{aligned}$$

terbukti.  $\square$

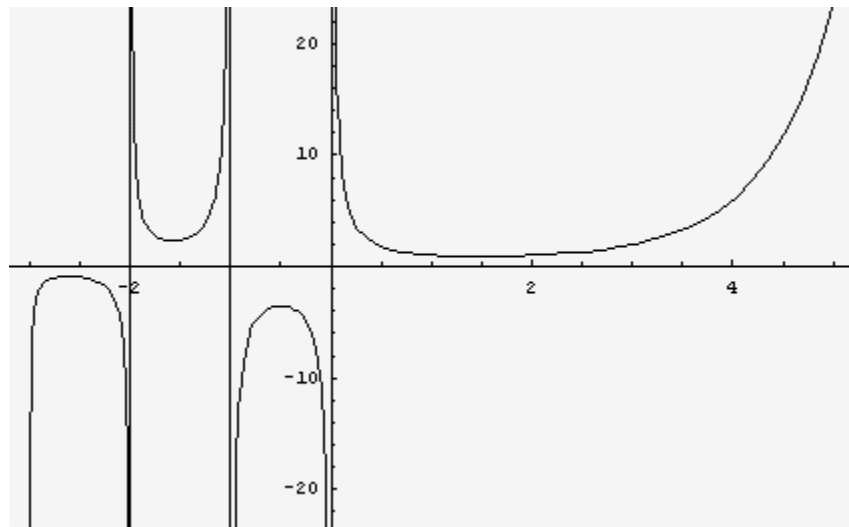
$$\begin{aligned}
5. \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} \, d\theta &= \frac{1}{2} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} \theta \cos^{-1/2} \theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{1}{4} \pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

## 5.7. Perintah-Perintah *MATHEMATICA*

☞ Menggambar grafik fungsi Gamma

```
In[1]:=Plot[Gamma[x],{x,-3,5}]
```

```
Out[1]=
```



☞ Menghitung nilai fungsi Gamma

```
In[2]:=Gamma[4]
```

```
Out[2]=6
```

```
In[3]:=Gamma[1/2]
```

```
Out[3]=  $\sqrt{\pi}$ 
```

```
In[4]:=Gamma[-7/2]
```

```
Out[4]=  $\frac{16\sqrt{\pi}}{105}$ 
```

☞ Menghitung nilai fungsi Beta

```
In[5]:=Beta[3,7]
```

```
Out[5]=  $\frac{1}{252}$ 
```

```
In[6]:=Beta[3/2,2]
```

```
Out[6]=  $\frac{4}{15}$ 
```

☞ Membuktikan nilai fungsi Gamma dengan definisi

$$\text{In}[7] := \text{gamma4} = \int_0^{\infty} (x^3 \text{Exp}[-x]) \, dx$$

$$\text{Out}[7] = 6$$

☞ Membuktikan nilai fungsi Beta dengan definisi

$$\text{In}[8] := \text{beta37} = \int_0^1 (x^2 (1-x)^6) \, dx$$

$$\text{Out}[8] = \frac{1}{252}$$

## **SOAL-SOAL LATIHAN**

1. Hitunglah

$$(a). \quad \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(3)} = \dots$$

$$(b). \quad \Gamma(1/2)\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)\Gamma(7/2) = \dots$$

$$(c). \quad \Gamma(-7/2) = \dots$$

$$(d). \quad \Gamma(-1/3) = \dots$$

2. Selesaikanlah

$$(a). \quad \int_0^{\infty} x^9 e^{-x} dx = \dots$$

$$(b). \quad \int_0^{\infty} x^6 e^{-4x} dx = \dots$$

$$(c). \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = \dots$$

$$(d). \int_0^1 (\ln x)^4 dx = \dots$$

3. Hitunglah

$$(a). B(3,7) = \dots$$

$$(b). B(3/2,2) = \dots$$

$$(c). B(1/3,2/3) = \dots$$

$$(d). B(1/2,1/2) = \dots$$

4. Selesaikanlah

$$(a). \int_0^{\pi/2} \cos^5(x) \sin^3(x) dx = \dots$$

$$(b). \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x dx$$

$$(c). \int_0^4 x^{3/2} (4-x)^{5/2} dx$$

$$(d). \int_0^4 x^4 (a^2 - x^2)^{1/2} dx = \dots \quad a \text{ konstan}$$

BAB 5 : FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA .....	90
5.1. Pendahuluan .....	90
5.2. Fungsi Gamma .....	90
5.3. Sifat-Sifat Fungsi Gamma .....	91
5.4. Fungsi Beta .....	93
5.5. Sifat-Sifat Fungsi Beta .....	94
5.6. Terapan .....	96
5.7. Perintah-Perintah MATHEMATICA .....	100
SOAL-SOAL LATIHAN .....	101
 BAB 5 : FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA .....	90
5.1. Pendahuluan .....	90
5.2. Fungsi Gamma .....	90
5.3. Sifat-Sifat Fungsi Gamma .....	91
5.4. Fungsi Beta .....	93
5.5. Sifat-Sifat Fungsi Beta .....	94
5.6. Terapan .....	96
5.7. Perintah-Perintah MATHEMATICA .....	100
SOAL-SOAL LATIHAN .....	101